Géométrie repérée dans le plan

Table des matières

I Coordonnées du milieu d'un segment

Définition

Soient deux points $A\left(x_A\ ;\ y_A\right)$ et $B\left(x_B\ ;\ y_B\right)$ deux points. Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.
Cela revient à calculer la moyenne des abscisses et des ordonnées.

Exemples d'application :

Exemple 1 Dans le plan muni d'un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on considère les points A(-3 ; -1), B(5 ; -2), C(7 ; 3) et D(-1 ; 4).
Montrer que ABCD est un parallélogramme.

Solution :
Notons K et L les milieux des deux diagonales $[AC]$ et $[BD]$.
$x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-3+7}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1$
$x_L = \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{5+(-1)}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $y_L = \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{-2+4}{2} = 1$
K et L sont les mêmes coordonnées donc $K = L$.
Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ ont le même milieu : $\boxed{\text{ABCD est un parallélogramme}}$.

Exemple 2 On considère les points A(2 ; 5), B(-1 ; 7) et C(11 ; 13).
On cherche les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

Solution
On note x_{D} et y_{D} les coordonnées de D.
ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, les diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu.
Soit M le milieu de [AC] ; on a :

$$\left\{\begin{array}{l} x_{\text{M}} = \dfrac{x_{\text{A}} = x_{\text{C}}}{2} = \dfrac{13}{2} \\ y_{\text{M}} = \dfrac{y_{\text{A}} + y_{\text{C}}}{2} = 9 \end{array}\right. .$$

De même, les coordonnées du milieu de [AD] sont : $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x_\text{B}+x_\text{D}}{2}=\dfrac{-1+x_\text{D}}{2}\\ \dfrac{y_\text{B}+y_\text{D}}{2}=\dfrac{7+y_\text{D}}{2}\end{array}\right.$

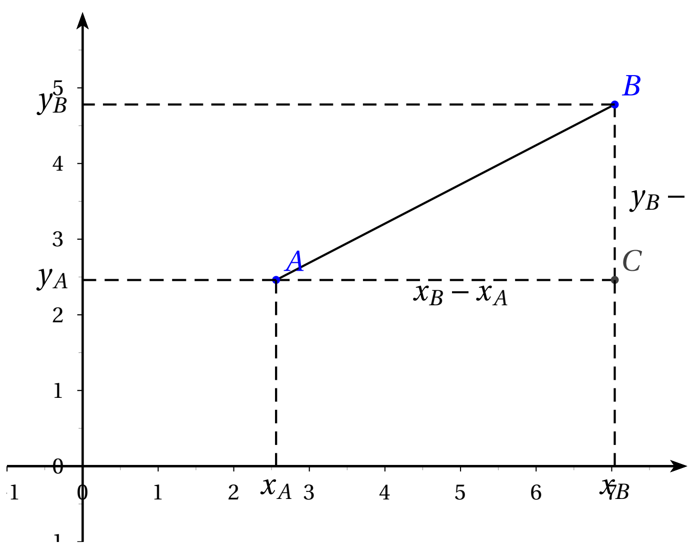
Les deux diagonales ont le même milieu, donc on doit avoir égalité entre les coordonnées :
Donc $\dfrac{-1+x_\text{D}}{2}=\dfrac{13}{2}$ d'où $-1+x_\text{D}=13$, donc $x_\text{D}=14$.
$\dfrac{7+y_\text{D}}{2}=9$ donc $7+y_\text{D}=18$ d'où $y_\text{D}=11$.
D a pour coordonnées $\boxed{\text{D}(14\,;\,11)}$.

II Distance entre deux points

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; I ; J).
On considère les points $A\left(x_A\,;\,y_A\right)$ et $B\left(x_B\,;\,y_B\right)$.
Alors, la distance AB vaut : $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$

Démonstration :
Supposons que $x_B>x_A$ et $y_B>y_A$.
Cette démonstration est basée sur le théorème de Pythagore.



Comme le repère est orthonormé, le triangle ABC est rectangle.
D'après le théorème de Pythagore, on a : $AB^2=AC^2+BC^2=\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2$.

Par conséquent : $\boxed{AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}}$.

On admet que cette démonstration est valable quelles que soient les positions de A et de B, car $\left(x_B-x_A\right)^2=\left(x_A-x_B\right)^2$ et $\left(y_B-y_A\right)^2=\left(y_A-y_B\right)^2$.

Remarque : cette formule est à apprendre par cœ ur et à appliquer directement.

Exemple : Soient $A(3\,;\,7)$ et $B(2\,;\,13)$.

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}=\sqrt{(2-3)^2+(13-7)^2}=\sqrt{(-1)^2+6^2}=\sqrt{1+36}=\sqrt{37} \text{ donc } \boxed{AB=\sqrt{37}}$$

Exercice :

Montrer que le point $A\left(1\ ;\ \sqrt{2}\right)$ appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

$OA=\sqrt{(x_A-x_O)^2+\left(y_A-y_O\right)^2}=\sqrt{1^2+\sqrt{2})^2}=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$.
La longueur OA est égale au rayon du cercle donc A appartient au cercle.

Exercice :

Soient $A(1\ ;\ -2)$ et $B(4\ ;\ 2)$.
Montrer que B appartient au cercle de centre $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 5.
$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(2-(-2))^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$.
B appartient bien au cercle de centre A et de rayon 5.

Exercice :

Soient $A(-2\ ;\ -1)$, $B(1\ ;\ 3)$ et $C(-3\ ;\ 6)$.
Démontrer que ABC est rectangle isocèle.

- $AB=\sqrt{(1-(-2))^2+(3-(-1))^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$
- $BC=\sqrt{(-3-1)^2+(6-3)^2}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$
- $AC=\sqrt{(-3-(-2))^2+(6-(-1))^2}=\sqrt{(-1)^2+7^2}=\sqrt{1+49}=\sqrt{50}$
- $AB=BC$ donc ABC est isocèle.
- $AC^2=\sqrt{50}^2=50$; $AB^2+BC^2=5^2+(^2=25+25=50$.
  $AC^2=AB^2+BC^2$.
  D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle.
  Il est donc $\boxed{\text{isocèle rectangle en B}}$.