Correction du contrôle (milieux et longueur d'un segment) (sujet 2)

I **(1,5 point)**

Dans un repère, on considère les points $A(3\,;\,4)$ et $B(4\,;\,-8)$.

$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{3+4}{2} = \dfrac{7}{2}$

$y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{4+(-8)}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2.$

Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\boxed{M\left(\dfrac{7}{2}\,;\,-2\right)}$

II **(1,5 point)**

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(5\,;\,3)$ et $B(2\,;\,5)$.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(2-5)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ donc $\boxed{AB = \sqrt{13}}$.

III **(4 points)**

Dans un repère (O; I; J) orthonormal, on donne les points R(2; -3), S(-1; -2), T(1; 4) et U(4; 3).

1) Voir figure à la fin de l'exercice.

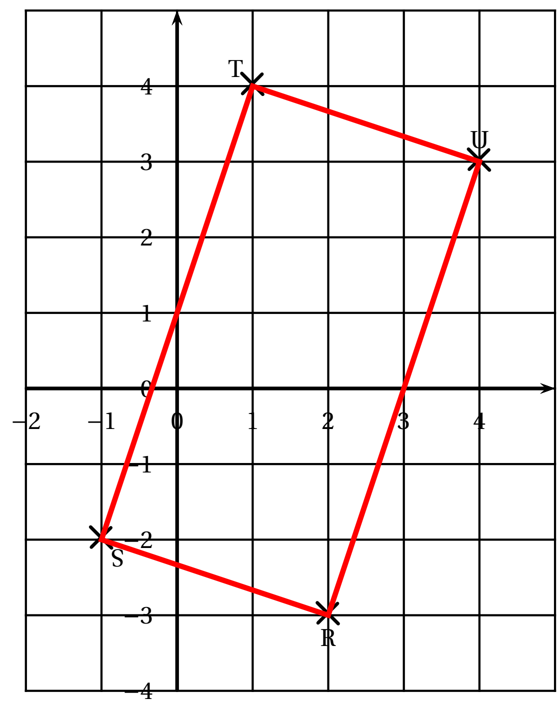
2) RSTU semble un rectangle

3) $x_M = \dfrac{x_R + x_T}{2} = \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2}$ et $y_M = \dfrac{y_R + y_T}{2} = \dfrac{-3+4}{2} = \dfrac{1}{2}$.
$\boxed{M\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)}$

4) De même : $x_{M'} = \dfrac{x_S + x_U}{2} = \dfrac{-1+4}{2} = \dfrac{3}{2}$ et
$y_{M'} = \dfrac{y_S + y_U}{2} = \dfrac{-2+3}{2} = \dfrac{1}{2}$.
$\boxed{M'\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)}$

5) M et M' ont les mêmes coordonnées donc $\boxed{M = M'}$. Les diagonales du quadrilatère $RSTU$ ont le même milieu donc c'est un **parallélogramme**. Montrons que c'est un rectangle.

- $SR = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-3-(-2))^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.
- $ST = \sqrt{(1-(-1))^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{4+36}$ $= \sqrt{40}$.
- $RT = \sqrt{1-(2))^2 + (4-(-3))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{1+49}$ $= \sqrt{50}$
- $RT^2 = 50$; $SR^2 + ST^2 = 10 + 40 = 50$ donc $RT^2 = SR^2 + ST^2$.
  D'après la réciproque du théorème de Pythagore, RST est rectangle en S.
  $RSTU$ est un parallélogramme avec un angle droit, c'est un rectangle.



IV **(4 points)**

Dans un repère orthonormé (O; I; J), on considère les points A (2; 1), B (4; 4) et C (6; 1).

1)
- $AB = \sqrt{(4-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \boxed{\sqrt{13}}$.
- $AC = \sqrt{(6-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$
- $BC = \sqrt{(6-4)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

2) $AB = BC = \sqrt{13}$ donc ABC est isocèle en B

V **(3 points)**

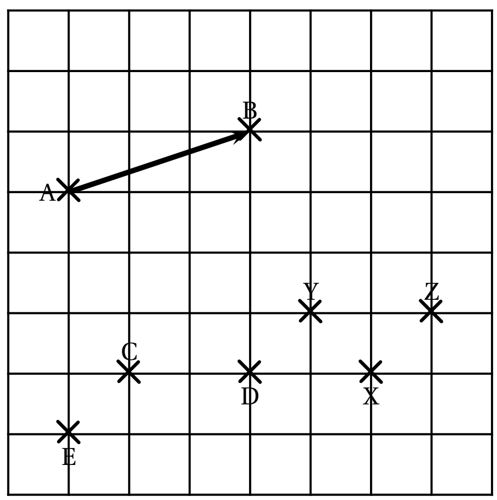
Dans un repère orthonormé (0 ; I ; J), on considère les points A(-1 ; - 1), B(5 ; 3), F(4 ; 4).

1. $x_I = \dfrac{-1+5}{2} = 2$; $y_I = \dfrac{3+(-1)}{2} = 1$ donc $\boxed{I(2\ ;\ 1)}$.
2. Le rayon r du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] est $r = IA = \sqrt{(-1-2)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. $\boxed{IA = \sqrt{13}}$
3. $IF = \sqrt{(4-2)^2+(4-1)^2} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} = r$.
   $IF = r = \sqrt{13}$ donc F appartient au cercle de centre I et de rayon $\sqrt{13}$.

VI **(3 points)**

À partir de la figure :

1) L'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est Y.
   L'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est Z.
   L'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est D.
2) On en déduit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CY} = \overrightarrow{DZ} = \overrightarrow{ED}$
3)
   - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CY}$ donc $ABYC$ est un parallélogramme.
   - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DZ}$ donc $ABZD$ est un parallélogramme.
   - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$ donc $ABDE$ est un parallélogramme.



VII **(3 points)**

Soient A, B et C trois points. (Voir figure).

1. Construire le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Voir figure
2. Construire le point E tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$. Voir figure
3. Par construction, on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$ donc $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CD}$.
   On en déduit que C est le milieu de $[ED]$