2^{nde} : Correction du TD n° 6 (milieux, distances)

Pour chaque exercice, le plan est muni d'un repère orthonormé $[0\,;\ I\,;\ J]$.

I

Soient les points $A\left(-\frac{1}{2}\,;\ \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{6}\,;\ \frac{7}{6}\right)$ et $C\left(\frac{5}{6}\,;\ \frac{1}{2}\right)$.

1) • $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{7}{6}-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\boxed{\sqrt{\frac{8}{9}}}$.

• $BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{6}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\boxed{\sqrt{\frac{8}{9}}}$

• $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{6}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2+(0)^2}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\boxed{\frac{4}{3}}$

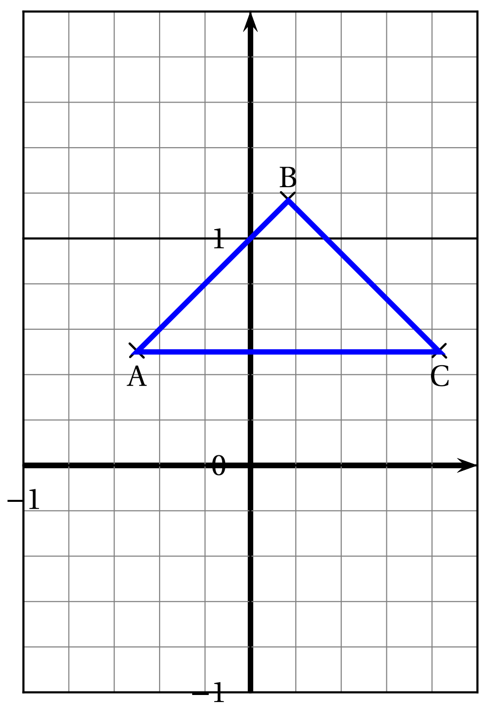
2) • $AB=BC$ donc ABC est **isocèle**.

• $AC^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$.

• $AB^2+BC^2=\sqrt{\frac{8}{9}}^2+\sqrt{\frac{8}{9}}^2=\frac{8}{9}+\frac{8}{9}=\frac{16}{9}$.
On constate que $AC^2=AB^2+BC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est **rectangle** en B.

3) • $\widehat{ABC}=\boxed{90\,°}$.

• $\widehat{BAC}=\widehat{ACB}=\boxed{45\,°}$ (triangle rectangle isocèle)



II

Soient les points $A(0\,;\,1)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$.

1) Démontrons que le triangle ABC est équilatéral.

- $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{3}$; $\boxed{AB=\sqrt{3}}$.

- $BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+0^2}=\sqrt{3}$; $\boxed{BC=\sqrt{3}}$.

- $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{12}{4}}=\sqrt{3}$; $\boxed{AC=\sqrt{3}}$.

On obtient : $AB=BC=AC=\sqrt{3}$ donc ABC est bien équilatéral.

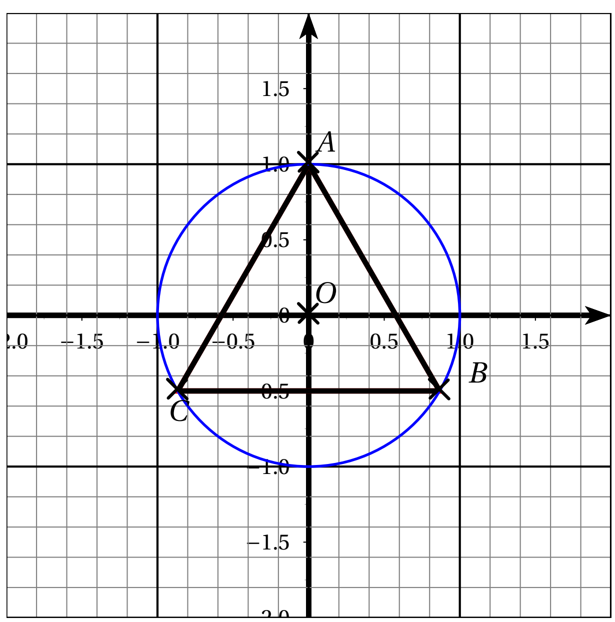
2) Montrons que le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le point O, origine du repère.

- $OA=1$ (évident, puisque A est à une unité de O sur l'axe des ordonnées).

- $OB=\sqrt{(x_B-x_O)^2+(y_B-y_O)^2}=\sqrt{x_B^2+y_B^2}$ (car $x_O=y_O=0$)
$=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{1}=1.$

- De même : $OC=\sqrt{(x_C-x_O)^2+(y_C-y_O)^2}=\sqrt{x_C^2+y_C^2}=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{1}=1$

On a : $OA=OB=OC=1$: A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1, donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est O.



III

Soient $A(-1\,;\,-1)$ et $B(4\,;\,2)$.

1) Compléter : la médiatrice du segment $[AB]$ est l'ensemble des points M équidistants de A et B.

2) Démontrons que $C(6\,;\,-7)$ appartient à la médiatrice de $[AB]$.

$AC = \sqrt{(6-(-1))^2+(-7-(-1))^2} = \sqrt{7^2+(-6)^2} = \sqrt{49+36} = \boxed{\sqrt{85}}$

$BC = \sqrt{(6-4)^2+(-7-2)^2} = \sqrt{2^2+(-9)^2} = \sqrt{4+81} = \boxed{\sqrt{85}}$.

$AC = BC$ donc C est équidistant de A et de B. On en déduit que C appartient à la médiatrice de $[AB]$.

3) Le milieu I de $[AB]$ appartient à cette médiatrice.

$I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $I\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$

IV

Soient $A(1\,;\,1)$, $B(5\,;\,3)$, $C(3\,;\,7)$ et $D(-1\,;\,5)$.

Pour montrer que $ABCD$ est un carré, on va montrer que successivement que c'est un losange puis un carré..

★
- $AB = \sqrt{(5-1)^2+(3-1)^2} = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}$.
- $BC = \sqrt{(3-5)^2+(7-3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$
- $CD = \sqrt{(-1-3)^2+(5-7)^2} = \sqrt{(-4)^2+2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$
- $AD = \sqrt{(-1-1)^2+(5-1)^2} = \sqrt{(-2)^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

$AB = BC = CD = AD = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $ABCD$ est un quadrilatère dont les quatre côtés ont la même longueur ; c'est un **losange**.

★ Montrons que c'est un carré donc qu'il a un angle droit.

Calculons AC : $AC = \sqrt{(3-1)^2+(7-1)^2} = \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$.

Dans le triangle ABC, on a :

- $AC^2 = \sqrt{40}^2 = 40$
- $AB^2 + BC^2 = \sqrt{20}^2 + \sqrt{20}^2 = 20+20 = 40$

Donc : $AC^2 = AB^2 + BC^2$; d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B.

$ABCD$ est un losange avec un angle droit donc c'est un **carré**.