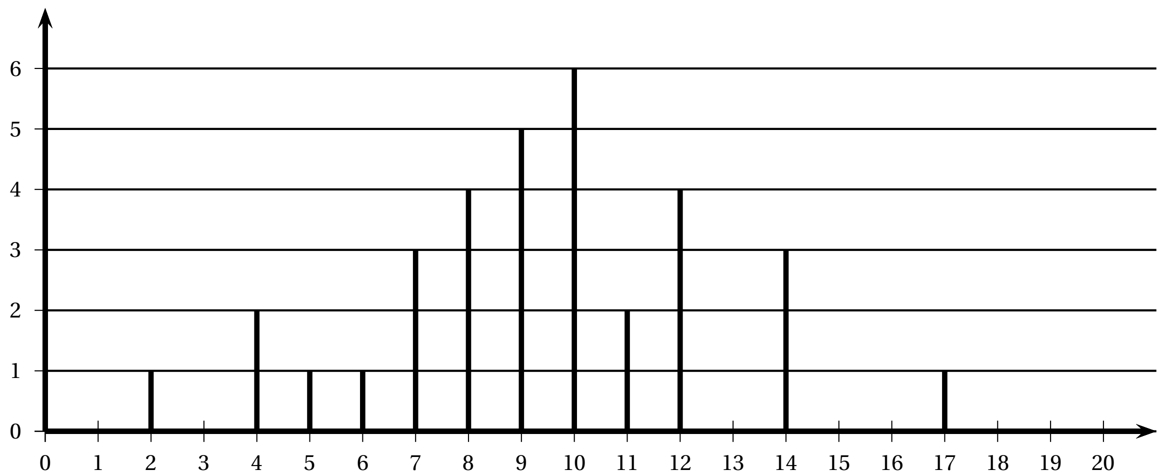
Correction du TD n° 20 (statistiques)

I

Lorsque le caractère étudié est quantitatif discret (valeurs séparées), on peut représenter la série statistique par un diagramme en bâtons : La hauteur de chaque bâton est proportionnelle à l'effectif (ou la fréquence) associée à chaque valeur.
Voici le diagramme en bâtons représentant une série de notes obtenues par une classe à un contrôle.



1. Recopiez et conplétez le tableau suivant :

Notes	2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	17	Total
Effectif	1	2	1	1	3	4	5	6	2	4	3	1	33

2. La moyenne est :
$$\overline{x} = \frac{(1\times 2)+(2\times 4)+\cdots+(1\times 17)}{33} = \frac{308}{33} \approx \boxed{9,33}$$

II

Calculer la moyenne de la série suivante.

Valeurs x_i	17	20	25	35	48	60
Effectifs n_i	5	10	5	8	12	13
$n_i \times x_i$	85	200	125	280	576	780

La moyenne est $\overline{x} = \dfrac{2\,046}{53} \approx 38,6$

III Calculs de médianes

1. **Exemple 1**, avec des notes obtenues par les élèves d'une classe à un contrôle

Note sur 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre d'élèves	0	1	1	0	3	4	5	3	3	1	2
Effectifs cumulés croissants	0	1	2	2	5	9	14	17	20	21	23

L'effectif total est $N = 23$, nombre impair.
$N = 2\times 11 + 1 = 2p + 1$ avec $p = 11$.
La médiane est la valeur $x_{p+1} = x_{12}$, donc la douzième valeur. $\boxed{\text{Me} = 6}$

2. **Exemple 2**, avec des notes obtenues par les élèves d'une autre classe à un contrôle :

Note sur 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre d'élèves	0	1	2	8	7	5	3	2	2	2	2
Effectifs cumulés	0	1	3	11	18	23	26	28	30	32	34

L'effectif total est $N = 34$, nombre pair.
$N = 2p$ avec $p = 17$.
La médiane est $\dfrac{x_p + x_{p+1}}{2} = \dfrac{3+4}{2} = \dfrac{7}{2}$

IV Linéarité de la moyenne

Soit une série statistique de N nombres $x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_N$.

1. La moyenne est $\boxed{\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}}$
2. Soit b un nombre réel.
   La moyenne est alors :
   $\dfrac{(x_1+b)+(x_2+b)+(x_3+b)+\cdots+(x_N+b)}{N}$
   $= \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_N+N\times b}{N} = \dfrac{V}{N} + \dfrac{\cancel{N}b}{\cancel{N}} = \overline{x}+b.$
   Si on augmente toutes les valeurs de b, la moyenne augmente de b.
   Symboliquement, on écrit : $\boxed{\overline{x+b} = \overline{x}+b}$
3. On multiplie toutes les valeurs par a.
   La moyenne devient :
   $\dfrac{ax_1+ax_2+ax_3+\cdots+ax_N}{N} = \dfrac{a(x_1+x_2+\cdots+x_N)}{N} = a\times\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N} = a\times\overline{x}.$
   Si on multiplie toutes les valeurs de la série par a, la moyenne st multipliée par a.
   Symboliquement : $\boxed{\overline{ax} = a\overline{x}}$
4. En combinant les deux propriétés, on obtient : $\boxed{\overline{ax+b} = a\overline{x}+b}$.
   Cette propriété s'appelle **linéarité de la moyenne**
5. Lors d'un contrôle, un professeur décide de remonter les notes de tous les élèves de 2 points.
   La moyenne de la classe augment de 2 points.

V

On a relevé le nombre de macarons vendus quotidiennement pendant une semaine dans une grande pâtisserie.

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
Nombre de macarons vendus	324	240	310	204	318	386	468

On range les valeurs correspondantes au nombre de macarons vendus dans l'ordre croissant : 204 ; 240 ; 310 ; 318 ; 324 ; 3
L'effectif total est 7 (nombreimpair) ; $7 = 2\times 3+1 = 2p+1$ avec $p = 3$.
La médiane est la valeur $x_{p+1} = x_4$, donc la 4[e] valeur de la série ordonnée, c'est-à-dire 318.
Le nombre médian de macarons est donc de $\boxed{318}$.

VI

On a relevé, dans un jeu télévisé, le nombre de candidats ayant répondu correctement à une liste de questions.

Nombre de bonnes réponses	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	1	2	5	8	15	45	32	21	9	2
Effectifs cumulés croissantes	1	3	8	16	31	76	108	129	138	140

Pour trouver les quartiles, on calcule les effectifs cumulés croissants. (voir tableau).
L'effectif total est $N = 140$.

- Calcul du rang du premier quartile :
  $\dfrac{N}{4} = \dfrac{140}{4} = \dfrac{70}{2} = 35$.
  Le premier quartile est la 35$^{\text{e}}$ valeur. Ainsi : $\boxed{Q_1 = 6}$.
- Calcul du rang du troisième quartile :
  $3 \times \dfrac{N}{4} = 3 \times \dfrac{140}{4} = 3 \times \dfrac{70}{2} = 3 \times 35 = 105$.
  Le troisième quartile est la 105$^{\text{e}}$ valeur. Ainsi : $\boxed{Q_3 = 7}$.
- L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1 = 7 - 6 = \boxed{1}$