2nde-correction du TD nº 2 (irrationalité de $\sqrt{2}$ et calculs sur les fractions)

I Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

On veut démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
On va effectuer un « raisonnement par l'absurde ».
Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel, donc égal à une fraction $\frac{a}{b}$ irréductible et montrons que l'on arrive à une contradiction.

1. **Préliminaires** : Montrons que le carré d'un nombre entier pair (respectivement impair) est pair (respectivement impair).
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pair. Un nombre epair est un multiple de 2, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
   Alors $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2k$ donc n^2 est pair.
   (b) Soit n un entier impair. Il existe un nombre p tel que $n = 2p + 1$.
   Alors $n^2 = (2p+1)^2 = (2p+1)(2p+1) = 2p \times 2p + 1 \times 2p + 2p \times 1 + 1 \times 1 = 4p^2 + 4p + 1 = 2\left(2p^2 + 2p\right) + 1$.Cet entier est impair (nombre pair augmenté de 1)
   (c) Conclusion : le carré d'un nombre pair est pairet le carré d'un nombre impair est impair.
2. **Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$** :
   Supposons que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, fraction **irréductible** avec a et b entiers naturels, $b \neq 0$.
   (a) On en déduit : $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \sqrt{2}^2$, donc $\frac{a^2}{b^2} = 2$ d'où $\boxed{a^2 = 2b^2}$
   (b) Puisque $a^2 = 2b^2$, a^2 est un nombre pair.
   (c) Si a était impair, a^2 serait aussi pair; or a^2 est pair, donc a est **pair**.
   (d) Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $\boxed{a = 2k}$.
   $a = 2k$ donne $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$; or $a^2 = 2b^2$, donc $4k^21 = 2b^2$.
   En simplifiant par 2, il vient : $\boxed{2k^2 = b^2}$.
   (e) b^2 est donc **pair**, donc b est pair même raisonnement que pour a.
   (f) Puisque b est pair, il existe un nombre s tel que $\boxed{b = 2s}$
   (g) On a supposé $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, fraction **irréductible**. En remplaçant a et b par ce que nous avons trouvé, nous avons :
   $\frac{a}{b} = \frac{2k}{2s}$ qu'on peut simplifier par 2, en **contradiction** avec l'irrationalité de $\sqrt{2}$.
   (h) L'hypothèse « $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, fraction **irréductible** » est donc fausse (puisqu'elle mène à une contradiction).
   $\sqrt{2}$ n'est donc pas un nombre rationnel; c'est un nombre réel.

Remarque : nous avons vu en cours que l'ensemble des réels contient l'ensemble des rationnels; il le contient strictement, puisque $\sqrt{2}$ est réel mais pas rationnel, de même que π. Il y a beaucoup de réels non rationnels.
Cantor, mathématicien allemand de la fin du XIXe siècle a montré que $\mathbb{Q}$ contenait une infinité de nombres (autant que $\mathbb{N}$, bien que contenant $\mathbb{N}$!!!) mais que $\mathbb{R}$ contenait une infinité de nombres plus grande que l'infinité qui concerne $\mathbb{Q}$.
Il a donc montré qu'il y avait différentes « tailles » d'infinis ....

Le nombre infini d'entiers naturels, d'entiers relatifs, de rationnels est le même : on le note $\aleph_0$.
Le nombre infini de réels est noté $\aleph_1$

Remarque :

La découverte de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ a engendré une crise mathématique chez les grecs; en effet, pour eux, toute chose était mesurable (donc, en particulier la diagonale d'un carré de coté 1 qui vaut $\sqrt{2}$ en appliquant le théorème de Pythagore). Or, ils ne connaissaient que les nombres rationnels. Ils se sont donc retrouvés avec une grandeur qu'ils ne pouvaient mesurer. Au lieu d'approfondir la question et d'étudier ces nouveaux nombres (mais c'était difficile, car ils n'avaient pas nos notations modernes), ils se sont concentrés sur la géométrie.
Si tu as le temps, tu peux lire l'article suivant (notamment la partie sur les grecs), sur l'histoire de la racine carrée : voir :

`https://fr.wikipedia.org/wiki/Histoire_de_la_racine_carrée`

La légende veut que l'un des membres de l'école Pythagoricienne, Hippase de Metaponte, fut tué pour avoir révélé le secret de l'irrationalité de ce nombre

II

Calculer sous forme de fraction irréductible :

$A=\dfrac{4}{9}-2\times\dfrac{7}{6}=\dfrac{4}{9}-\dfrac{\cancel{2}\times 7}{\cancel{2}\times 3}=\dfrac{4}{9}-\dfrac{7}{3}=\dfrac{4}{9}-\dfrac{21}{9}=\boxed{-\dfrac{17}{9}}$.

$B=\dfrac{1-2\times\frac{7}{3}}{\left(1-\frac{1}{6}\right)^2}=\dfrac{1-\frac{14}{3}}{\left(\frac{6}{6}-\frac{1}{6}\right)^2}=\dfrac{\frac{3-14}{3}}{\left(\frac{5}{6}\right)^2}$
$=\dfrac{-)\frac{11}{3}}{\frac{25}{36}}=-\dfrac{11}{3}\times\dfrac{36}{25}=-\dfrac{11\times\cancel{3}\times 12}{\cancel{3}\times 25}=-\dfrac{11\times 12}{25}=\boxed{-\dfrac{132}{25}}$

$C=\dfrac{1-\frac{1}{3}}{6}\times\dfrac{9}{4}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{\frac{2}{3}}{6}\times\dfrac{9}{4}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{3}\times 6\times\dfrac{9}{4}-\dfrac{1}{5}$
$=2\times 2\times\dfrac{9}{4}-\dfrac{1}{5}=9-\dfrac{1}{5}=\dfrac{45-1}{5}=\boxed{\dfrac{44}{5}}$

III

On souhaite calculer $\dfrac{23}{48}-\dfrac{5}{15}$.
Pour cela, il faut mettre les fractions au même dénominateur.
Comme dénominateur commun, on calcule le plus petit commun multiple de 15 et 48, noté PPCM.

1. • $48=16\times 3=\boxed{2^4\times 3}$
   • $15=3\times 5$
2. Le PPCM de 15 et 48 est $2^4\times 3\times 5=\boxed{240}$ (en prenant chaque facteur premier intervenant dans l'un ou l'autre des décompositions, avec l'exposant le plus grand)
3. $\dfrac{23}{48}-\dfrac{5}{15}=\dfrac{23\times 5}{48\times 5}-\dfrac{16\times 5}{16\times 15}=\dfrac{115-80}{240}=\dfrac{35}{240}=\boxed{\dfrac{7}{48}}$

IV

Calculons $A=\dfrac{7}{160}+\dfrac{1}{2\,700}$.
$160=2^5\times 5^1$
$2\,700=2^2\times 3^3\times 5^2$.
Le PPCM de 160 et 2 700 est alors : $2^5\times 3^3\times 5^2=21\,600$
$A=\dfrac{7}{160}+\dfrac{1}{2\,700}=\dfrac{7\times 135}{21\,600}+\dfrac{8}{21\,600}=\boxed{\dfrac{953}{21600}}$

Calculons $B=\dfrac{5}{72}-\dfrac{1}{48}$. $72=2^3\times 3^2$
$48=2^4\times 3$
Le PPCM de 72 et 48 est donc $2^4\times 3^2=16\times 9=144$.
Alors : $B=\dfrac{10}{144}-\dfrac{3}{144}=\boxed{\dfrac{7}{144}}$

V

Simplifions les fractions suivantes lorsque c'est possible :

$A=\dfrac{13+a}{13-a}$ ne peut pas se simplifier.

$B=\dfrac{13+13a}{13-13a}=\dfrac{13(1+a)}{13(1-a)}=\boxed{\dfrac{1+a}{1-a}}$

$C=\dfrac{2x+3}{2(x+3)}$ ne peut pas de simplifier.

$D=\dfrac{2x+18}{2(x+3)}=\dfrac{2(x+9)}{2(x+3)}=\boxed{\dfrac{x+9}{x+3}}$

$E=\dfrac{10}{15n-10}=\dfrac{5\times 2}{5(3n-2)}=\boxed{\dfrac{2}{3n-2}}$