2nde-TD n° 2 (irrationalité de $\sqrt{2}$ et calculs sur les fractions)

I Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

On veut démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
On va effectuer un « raisonnement par l'absurde ».
Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel, donc égal à une fraction $\frac{a}{b}$ irréductible et montrons que l'on arrive à une contradiction.

1. **Préliminaires** : Montrons que le carré d'un nombre entier pair (respectivement impair) est pair (respectivement impair).

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pair. Un nombre epair est un multiple de 2, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
   Que vaut n^2 ? n^2 est-il pair ou impair ?

   (b) Soit n un entier impair. Il existe un nombre p tel que $n = 2p + 1$.
   Que vaut alors n^2 ? Cet entier est-il pair ou impair ?

   (c) Conclusion : le carré d'un nombre pair est ………….et le carré d'un nombre impair est ……….

2. **Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$** :
   Supposons que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, fraction **irréductible** avec a et b entiers naturels, $b \neq 0$.

   (a) Exprimer a^2 en fonction de b^2.

   (b) a^2 est-il un nombre pair ou impair ?

   (c) En déduire que a est aussi pair.

   (d) Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2k$.
   En remplaçant a par $2k$ dans $a^2 = 2b^2$ et en simplifiant, qu'obtient-on pour b^2 ?

   (e) b est-il alors pair ou impair ?

   (f) En déduire qu'il existe un nombre s tel que $b = 2s$.

   (g) Que vaut alors $\sqrt{2}$?
   Pourquoi arrive-t-on à une contradiction ?

   (h) Que peut-on en conclure ?

Remarque :
La découverte de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ a engendré une crise mathématique chez les grecs ; en effet, pour eux, toute chose était mesurable (donc, en particulier la diagonale d'un carré de coté 1 qui vaut $\sqrt{2}$ en appliquant le théorème de Pythagore). Or, ils ne connaissaient que les nombres rationnels. Ils se sont donc retrouvés avec une grandeur qu'ils ne pouvaient mesurer. Au lieu d'approfondir la question et d'étudier ces nouveaux nombres (mais c'était difficile, car ils n'avaient pas nos notations modernes), ils se sont concentrés sur la géométrie.
Si tu as le temps, tu peux lire l'article suivant (notamment la partie sur les grecs), sur l'histoire de la racine carrée : voir :

`https://fr.wikipedia.org/wiki/Histoire_de_la_racine_carrée`

La légende veut que l'un des membres de l'école Pythagoricienne, Hippase de Metaponte, fut tué pour avoir révélé le secret de l'irrationalité de ce nombre

II

Calculer sous forme de fraction irréductible :

$$A = \frac{4}{9} - 2 \times \frac{7}{6} \qquad B = \frac{1 - 2 \times \frac{7}{3}}{\left(1 - \frac{1}{6}\right)^2} \qquad C = \frac{1 - \frac{1}{3}}{6} \times \frac{9}{4} - \frac{1}{5}$$

III

On souhaite calculer $\frac{23}{48} - \frac{5}{15}$.
Pour cela, il faut mettre les fractions au même dénominateur.
Comme dénominateur commun, on calcule le plus petit commun multiple de 15 et 48, noté PPCM.

1. Effectuer la décomposition de ces deux nombres en produit de facteurs premiers
2. En déduire que le PPCM de 15 et 48 est 240.
3. Effectuer alors le calcul demandé.

IV

Calculer : $A = \frac{7}{160} + \frac{1}{2\,700} \qquad B = \frac{5}{72} - \frac{1}{48}$

V

Simplifier les fractions suivantes lorsque c'est possible :

$$A = \frac{13 + a}{13 - a} \qquad B = \frac{13 + 13a}{13 - 13a} \qquad C = \frac{2x + 3}{2(x + 3)}$$

$$D = \frac{2x + 18}{2(x + 3)} \qquad E = \frac{10}{15n - 10}$$