

Différents ensembles de nombres

Table des matières

I	Nombres entiers naturels	1
II	Nombres relatifs	2
II.1	Ensemble \mathbb{Z}	2
III	Nombres décimaux	3
IV	Nombres rationnels	3
V	Nombres réels	4
VI	Rappels sur les inégalités	5
VII	Intervalles finis de \mathbb{R}	5
VII.1	Intervalles fermés	5
VII.2	Intervalles semi-ouverts	5
VII.3	Intervalles ouverts	6
VIII	Intervalles infinis de \mathbb{R}	6
VIII.1	Intervalle illimité à droite	6
VIII.2	Intervalles illimités à droite	6
IX	Réunion et intersection de deux intervalles	7
X	Liens vers des vidéos	7

I Nombres entiers naturels



Définition

On appelle nombre entier **naturel** un nombre entier positif ou nul ; les entiers naturels sont les nombres servant à compter les objets (0 n'a été considéré comme nombre que tardivement).

L'ensemble des entiers naturels se note \mathbb{N} .

$$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 \dots\}$$

Remarque : le symbole 0 a été utilisé par les Babyloniens (il y a plus de 2000 ans, les Mayas, les Indiens ; il signifiait l'absence d'unité dans la numération de position (celle que nous utilisons) pour indiquer l'absence d'une unité ; dans l'utilisations des chiffres romains (notation de juxtaposition), le symbole 0 n'existe pas. 0 est apparu en occident grâce aux arabes, notamment par la traduction du mathématicien Al-Kwarismi. Pour les curieux : cliquer ici : [Histoire du nombre zéro](#).

II Nombres relatifs

II.1 Ensemble \mathbb{Z}



Définition

Un entier relatif est un nombre entier positif ou négatif ou nul.

L'ensemble des entiers relatifs se note \mathbb{Z} . C'est l'ensemble des entiers naturels auquel on adjoint leur opposés.

$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\dots\}$.

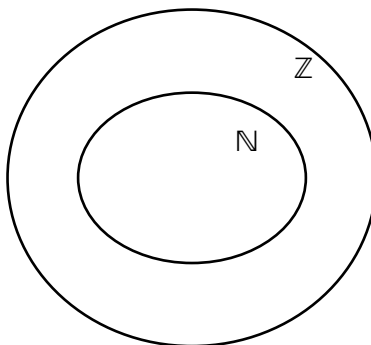
Remarque : \mathbb{Z} est l'initiale du mot allemand Zahl qui veut dire nombre.

Tous les entiers relatifs sont naturels; l'ensemble des entiers relatifs est **inclus** dans celui des entiers naturels; on écrit $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Remarques de notation.

- 6 est un nombre naturel. on écrit $6 \in \mathbb{N}$. (On lit « 6 appartient à \mathbb{N} »)
- 6 est aussi un entier relatif; on écrit $6 \in \mathbb{Z}$. (« 6 appartient à \mathbb{Z} »)
- -3 est un entier relatif : on écrit $-3 \in \mathbb{Z}$ mais $-3 \notin \mathbb{N}$ (-3 n'appartient pas à l'ensemble des entiers naturels).
- 7,2 n'est pas un entier naturel : on écrit $7,2 \notin \mathbb{N}$.

Schématiquement :



\triangle : Ne pas confondre les symboles \in et \subset .

Un ensemble est inclus dans un ensemble plus grand; un ensemble est constitué d'éléments; chaque élément de cet ensemble appartient à cet ensemble.

$A \subset B$ signifie que tous les éléments de A appartiennent à B , mais il peut y avoir des éléments de B qui ne sont pas dans A .

Remarque : Si $A \subset B$ et $B \subset A$ équivaut à dire que $A = B$ (ce sont les mêmes ensembles)

Exemples :

1. une classe de seconde notée A est constituée de deux sous-ensembles, l'ensemble des garçons de la classe, noté G et l'ensemble des filles, noté F . Hugo (noté H est un garçon de la classe)
On a $G \subset A, F \subset A, H \in G, H \in A, H \notin F$.
2. Notons \mathbb{P} l'ensemble des nombres entiers naturels pairs.
On écrit : $2 \in \mathbb{P}$ (se lit « 2 appartient à \mathbb{P} ») et $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ (se lit « \mathbb{P} est inclus dans \mathbb{N} »)

III Nombres décimaux



Définition

Un nombre x est décimal s'il peut s'écrire comme le quotient d'un nombre entier par une puissance de 10; $x = \frac{a}{10^k}$.

Son écriture décimale contient alors un nombre **fini** de chiffres.

L'ensemble des nombres décimaux est noté \mathbb{D} .

Un nombre est décimal si son écriture décimale **peut** s'écrire avec un nombre fini de chiffres.

Exemples :

• $7,121 = \frac{7121}{1000} = \frac{7121}{10^3}$ donc 7,121 est un nombre décimal.

• $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Justification : si $\frac{1}{3}$ était décimal, il existait k tel que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^k}$ donc $3a = 10^k$ ce qui est impossible car 3 ne divise jamais 10^k .

Autre justification : $\frac{1}{3} = 0,3333\cdots$ avec une infinité de 3 après la virgule, donc $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

\triangle : Ce n'est pas parce que l'écriture d'un nombre contient une infinité de décimales que celui-ci n'est pas décimal.

Exemple : le nombre $0,999999\cdots$ est égal à 1, car $0,333333\cdots = \frac{1}{3}$ donc $0,999999\cdots = 3 \times \frac{1}{3} = 1$

IV Nombres rationnels



Définition

a est un nombre rationnel s'il peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers relatifs, q non nul.

L'ensemble des nombres rationnels est noté \mathbb{Q} .

Exemples :

• $\frac{2}{3}$ est rationnel

• $2,33 = \frac{233}{100}$ donc 2,33 est rationnel.

• $\sqrt{2}$ ou π ne sont pas des nombres rationnels.



Propriété (admise)

Tout nombre rationnel r a une forme irréductible **unique**, c'est-à-dire qu'il existe un unique entier relatif a et un unique entier naturel b tel que $r = \frac{a}{b}$ et tels que le seul diviseur commun à a et b soit 1 (on dit que a et b sont premiers entre eux).

V Nombres réels

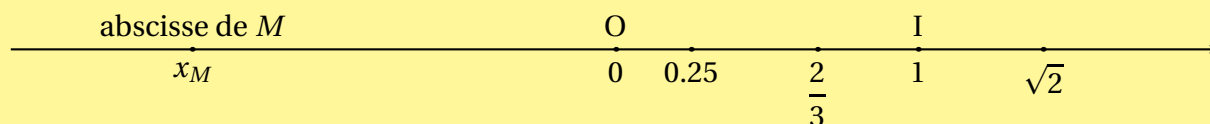
Nous avons vu qu'il existait des nombres qui n'étaient pas rationnels.

L'irrationalité de $\sqrt{2}$ démontrée par les Pythagoriciens ont entraîné la première crise de l'histoire des mathématiques (voir par exemple [ici](#)). D'après le théorème de Pythagore, la diagonale d'un carré de côté 1 vaut $\sqrt{2}$; pour les grecs, tout dans la nature est **mesurable**, mais les grecs ne conçoivent que les nombres entiers et les nombres rationnels (comme notion de partage). Or, ils ont montré que $\sqrt{2}$ n'était pas rationnel, donc ont trouvé une longueur non mesurable avec les nombres qu'ils connaissaient...

Remarque : ils n'ont pas su régler le problème! **Anecdote** : Hippase de Métaponte, aurait été noyé en mer pour avoir divulgué l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Définition

On considère une droite, munie d'un repère $(O; I)$.



L'ensemble des nombres réels est l'ensemble des abscisses des points de cette droite, appelée droite numérique (ou droite des réels).

À chaque point correspond un nombre unique (son abscisse) et à chaque nombre correspond un point unique.

L'ensemble des nombres réels est noté \mathbb{R} .

Exemples :

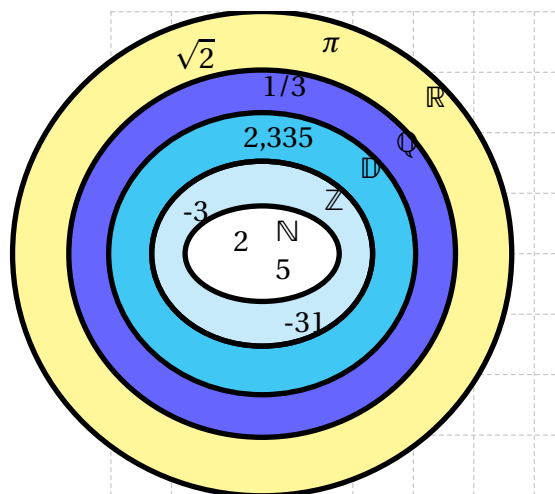
- Tous les nombres que vous connaissez sont des nombres réels.
- π , $\sqrt{2}$ sont des nombres réels, mais ils ne sont pas rationnels

Résumé sur les différents ensembles de nombres :

Nous avons les inclusions (strictes) suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Schématiquement :



VI Rappels sur les inégalités

Rappel :

$<$ signifie « est strictement inférieur à »

$>$ signifie « est strictement supérieur à »

\leq signifie « est inférieur **ou égal** à »

\geq signifie « est supérieur **ou égal** à »

Exemples :

- $2 < 7$ est vrai
- $7 < 7$ est faux
- $2 \leq 7$ est vrai
- $7 \leq 7$ est vrai
- $5 \geq 5$ est vrai car $5 = 5$
- $7 > 2$ est vrai

VII Intervalles finis de \mathbb{R}

VII.1 Intervalles fermés

Définition

Soient a et b deux réels.

L'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ est un intervalle, noté $[a ; b]$. a et b sont les bornes de cet intervalle.

On le représente en rouge sur la droite réelle de la façon suivante :



Cet ensemble est un intervalle de \mathbb{R} . a et b sont ses bornes. Cet intervalle contient ses bornes. On dit qu'il est fermé.

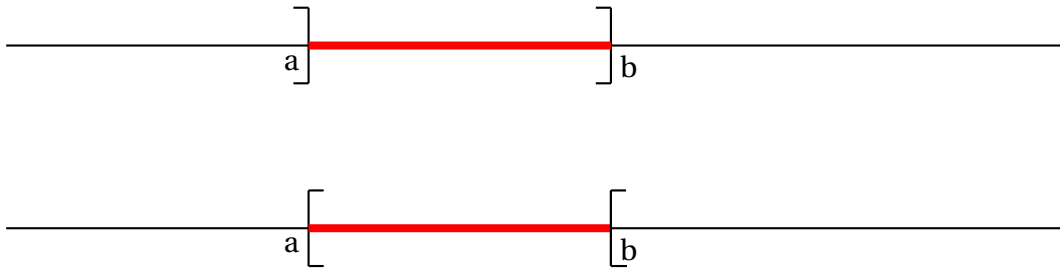
VII.2 Intervalles semi-ouverts

Définition

Soient a et b deux réels.

L'ensemble des réels x tels que $a < x \leq b$ est un intervalle, noté $]a ; b]$. a et b sont les bornes.

L'ensemble des réels x tels que $a \leq x < b$ est un intervalle, noté $[a ; b[$. a et b sont les bornes.



VII.3 Intervalles ouverts

Définition
 Soient a et b deux réels.
 L'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ est un intervalle, noté $]a; b[$. a et b sont les bornes.



VIII Intervalles infinis de \mathbb{R}

VIII.1 Intervalle illimité à droite

Définition
 L'ensemble des réels x tels que $a < x$ est un intervalle, noté $]a; +\infty[$.
 L'ensemble des réels x tels que $a \leq x$ est un intervalle, noté $[a; +\infty[$.



Remarque : Le symbole ∞ , qui se lit « infini » a été inventé par le mathématicien John Wallis (1616-1703).
Ce n'est pas un nombre réel.

VIII.2 Intervalles illimités à droite

Définition
 L'ensemble des réels x tels que $a < x$ est un intervalle, noté $]a; +\infty[$.
 L'ensemble des réels x tels que $a \leq x$ est un intervalle, noté $[a; +\infty[$.





Définition

L'ensemble des réels x tels que $x < a$ est un intervalle, noté $] -\infty ; a[$.

L'ensemble des réels x tels que $x \leq a$ est un intervalle, noté $[-\infty ; +a]$.



Remarques :

- Le crochet est fermé, tourné vers l'intérieur, si l'on garde le nombre et ouvert, vers l'extérieur, si l'on rejette le nombre.
- ∞ n'est pas un nombre réel, donc le crochet du côté de l'infini est **toujours** tourné vers l'extérieur.

IX Réunion et intersection de deux intervalles



Définition

Soient I et J deux intervalles.

1. L'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à I et à J est appelé l'intersection de I et J . Cet ensemble est noté $I \cap J$.
2. L'ensemble des réels qui appartiennent à I ou à J est appelé la réunion de I et J . Cet ensemble est noté $I \cup J$.

Exemples :

$$[4 ; 5] \cap [2 ; 3] = \emptyset$$

$$[2 ; 5] \cap [2 ; 3] = [2 ; 3]$$

$$[4 ; 7] \cap [6 ; 8] = [6 ; 7]$$

$$[4 ; 7] \cup [6 ; 8] = [4 ; 8]$$

X Liens vers des videos

- Résumé du cours : cliquer [ici](#)
- Intersection : cliquer [ici](#)
- Réunion : cliquer [ici](#)