Racine carrée d'un nombre positif

Table des matières

I Définition

Définition

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré vaut a.

Autrement dit : $\begin{cases} a \geqslant 0 \\ \sqrt{a} \geqslant 0 \\ \sqrt{a}^2 = a \end{cases}$

Exemples :

- $\sqrt{9} = 3$
- $\sqrt{25} = 5$
- $\sqrt{2} = \sqrt{2}$ (on ne peut pas écrire ce nombre de manière plus simple)
- $\sqrt{0} = 0$
- $\sqrt{1} = 1$
- $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$
- $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$ (⚠il ne faut pas simplifier trop vite ; la racine carrée d'un nombre est un nombre positif).

II Racine carrée d'un produit ou d'un quotient

Propriété

Soient deux nombres a et b positifs.

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ si $v \neq 0$

Démonstration :

- $\sqrt{ab}^2 = ab$ et $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a}^2 \times \sqrt{b}^2 = ab$.

  $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a}\sqrt{b}$ sont deux nombres positifs dont le carré est ab donc ces deux nombres sont égaux par définition de la racine carrée d'un nombre.
- De même : $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2 = \dfrac{a}{b}$ et $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}^2} = \dfrac{a}{b}$ donc $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

  ⚠ : **Remarque** : il n' pas de règle de calcul pour la racine carrée d'une somme.
  Pour a et b positifs, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
  Par exemple : $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ mais $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ donc $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$

III Simplification d'écriture

Propriété

Pour tous nombres a et b positifs, $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

En effet : $\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2}\sqrt{b} = a\sqrt{b}$.

Exemples :

1. $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{5^2 \times 3} = \boxed{5\sqrt{3}}$
2. $\sqrt{288} = \sqrt{2 \times 144} = \sqrt{2 \times 2 \times 72} = \sqrt{4 \times 72} = \sqrt{4 \times 9 \times 8} = \sqrt{4 \times 9 \times 4 \times 2} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 2^2 \times 2}$
   $= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} = 2 \times 3 \times 2\sqrt{2} = \boxed{12\sqrt{2}}$.
3. $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = \boxed{2\sqrt{2}}$

Remarque : pour simplifier l'écriture de la racine carrée d'un nommbre, on essaye d'écrire ce nombre sous la forme $a^2 b$, avec a le plus grand possible.

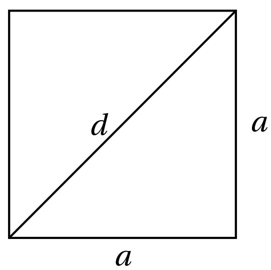
IV Racine carrée et géométrie

IV.1 Diagonale d'un carré

Propriété

La diagonale d'un carré de côté a a une longueur égale à $d = a\sqrt{2}$.

Démonstration



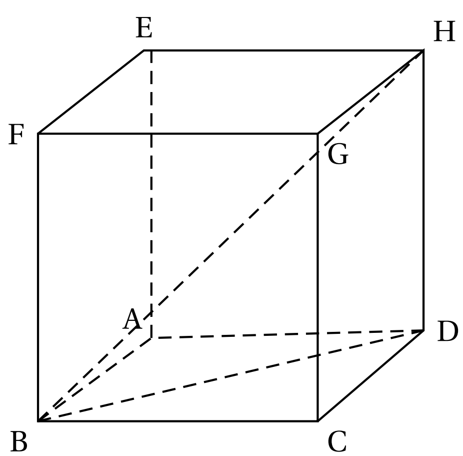
La diagonale tracée sépare le carré en deux triangles rectangles isocèles.
D'après le théorème de Pythagore, on a $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ d'où $d = \sqrt{2a^2} = \boxed{a\sqrt{2}}$.

IV.2 Diagonale d'un cube

Propriété

La diagonale d'un cube de côté a pour longueur $d = a\sqrt{3}$.

Démonstration :



On considère la diagonale [BD] de la face ABCD et la diagonale du cube [BH].

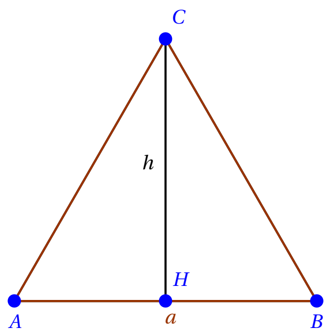
Le triangle BDH est rectangle en D. D'après le théorème de Pythagore, on a :
$BH^2 = BD^2 + DH^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$ d'où $BH = \sqrt{3a^2} = \boxed{a\sqrt{3}}$

IV.3 Hauteur d'un triangle équilatéral

Propriété

La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a vaut : $h = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Démonstration :



ABC est équilatéral de côté a ; on trace la hauteur $[CH]$ de longueur h.
Comme ABC est équilatéral, la hauteur $[CH]$ est aussi une médiane donc $AH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$.
Le triangle CAH est rectangle en H.
D'après le théorème de Pythagore, $CH^2 - AC^2 - AH^2 = a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{4a^2 - a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$.
On en déduit : $h = CH = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4}} = \boxed{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}$

V Équation $x^2 = b$

On considère l'équation $x^2 = b$.

Propriété

- Si $b < 0$, l'équation $x^2 = b$ n'a pas de solution (car un carré ne peut pas être négatif).
- Si $b = 0$, l'équation $x^2 = b$ a pour solution $x = 0$.
- Si $b > 0$, l'équation $x^2 = b$ a deux solutions : $x = -\sqrt{b}$ et $x = \sqrt{b}$

Exemples :

1. l'équation $x^2 = 36$ a deux solutions : $x = -\sqrt{36} = -6$ et $x = \sqrt{36} = 6$: $\boxed{\mathscr{S} = \{-8 ; 6\}}$
2. l'équation $x^2 = 7$ a pour solutions $x = -\sqrt{7}$ et $x = \sqrt{7}$: $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\sqrt{7} ; \sqrt{7}\right\}}$

VI Comparaison de deux racines carrées

Propriété

Si a et b sont deux nombres positifs, $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont classés dans le même ordre que a et b.
Si $a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
Si $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, alors $a < b$.

Démonstration :
On utilise la relation $b-a=\sqrt{b}^2-\sqrt{a}^2=\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)$.

- On suppose $a<b$ donc $b-a>0$; $\sqrt{b}+\sqrt{a}>0$ comme somme de nombres positifs, donc $\sqrt{b}-\sqrt{a}>0$ car le produit de deux nombres positifs est positif.
- De même, si $\sqrt{a}<\sqrt{b}$, alors $\sqrt{b}-\sqrt{a}>0$ et $\sqrt{b}+\sqrt{a}>0$ (somme de deux nombre spositifs) donc $b-a>0$ d'où $a<b$.

Exemple : comparer $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$.
On a : $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\times 3}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{12}$; $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\times 2}=\sqrt{9\times 2}=\sqrt{18}$.
$12<18$ donc $\sqrt{12}<\sqrt{18}$ d'où : $\boxed{2\sqrt{3}<3\sqrt{2}}$

VII Rendre rationnel le dénominateur d'une fraction

On évite de laisser une racine carrée au dénominateur d'une fraction.
On a deux cas :

- On a une expression du type $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$; on multiple alors numérateur et dénominateur par $\sqrt{b}$:
$\dfrac{a}{\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}^2}=\dfrac{a\sqrt{b}}{b}$.
- On a une expression du type $\dfrac{a}{b+\sqrt{c}}$; on multiplie numérateur et dénominateur par l'**expression conjuguée** du dénominateur (meme expression dans laquelle on remplace + par -, ou réciproquement).
$\dfrac{a}{b+\sqrt{c}}=\dfrac{a\left(b-\sqrt{c}\right)}{\left(b+\sqrt{c}\right)\left(b-\sqrt{c}\right)}=\dfrac{a\left(b+\sqrt{c}\right)}{b^2-\sqrt{c}^2}=\boxed{\dfrac{a\left(b+\sqrt{c}\right)}{b^2-c}}$

Exemples :

- $\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\boxed{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$.
- $\dfrac{5}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{2^2-\sqrt{3}^2}=\dfrac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{4-3}=\dfrac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{1}=\boxed{5\left(2-\sqrt{3}\right)}$