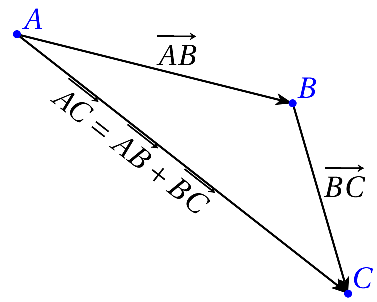
Vecteurs (deuxième partie)

I Somme de deux vecteurs

I.1 Définition

Le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Le point C est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. On applique **successivement** les deux translations. Cela revient à n'en appliquer qu'une seule (on va directement de A en C, sans passer par B). Cette translation qui permet de passer de A en C est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Ainsi définit-on une définition sur les vecteurs.



Propriété (relation de Chasles)

Pour tous points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Michel Chasles, né le 15 novembre 1793 à Épernon en Eure-et-Loir et mort le 18 décembre 1880 à Paris, est un mathématicien français, spécialisé en géométrie, notamment projective.
Pour plus de précisions cliquer ici

Remarque : Le segment d'extrémités A et C est la diagonale du parallélogramme dont $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont deux côtés consécutifs.

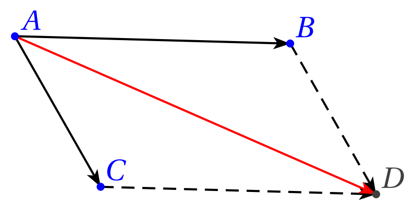
Exemples :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BC} = \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{AC}} + \overrightarrow{CE} = \underbrace{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}}_{\overrightarrow{AE}} = \boxed{\overrightarrow{AE}}$ (en utilisant deux fois la relation de Chasles)

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ (vecteur nul, caractéridsant une translatioon qeui laisse tus les points immobiles, donc de mouvement « nul »).
Par analogie avec les nombres, on dit que $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ (vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$)

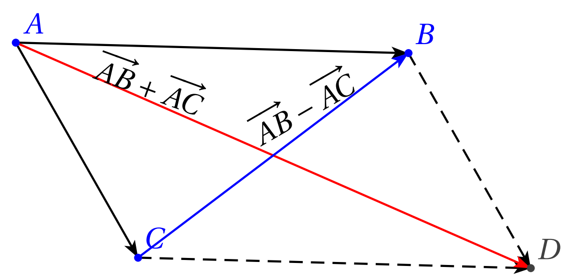
I.2 Somme de deux vecteurs de même origine :

On veut construire la somme de deux vecteurs de même origine $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.



On introduit le point D tel que ABDC soit un parallélogramme ($\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$). Ce point se construit au compas, puisque l'on doit avoir AB = CD et AC = BD. Alors : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$ (**relation de Chasles**).

Exemple : Soit ABDC un parallélogramme. On a vu précédemment que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$. On voudrait représenter également $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. On a : $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\boxed{\overrightarrow{CB}}$ en appliquant la relation de Chasles. On remarque que l'on obtient l'autre diagonale du parallélogramme.



II Multiplication d'un vecteur par un réel

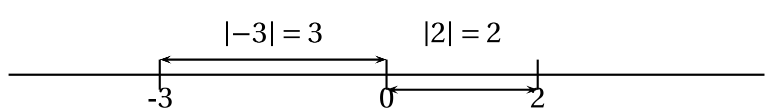
Rappel

Soit k un réel. On note $|k|$ (« se lit valeur absolue de k »), le nombre défini par :

- $|k|=k$ si $k>0$
- $|k|=-k$ si $k<0$

.
$|k|$ est donc toujours un nombre positif et représente la distance de k à l'origine sur une droite graduée.

Exemples :
$|2|=2$ car 2>0
$|-3|=-(-3)=3$ car $-3<0$



Notation

La « longueur » d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ se note $||\overrightarrow{u}||$.

Remarque : $||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

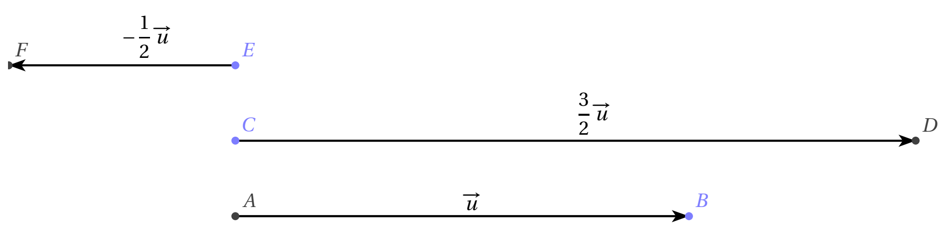
Propriété

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et soir k un réel non nul.

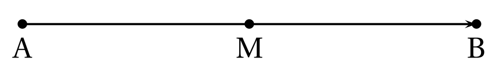
- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $k\overrightarrow{u}$ ont la même direction.
- Si $k > 0$, $k\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}$ ont le même sens. Si $k < 0$, les deux vecteurs sont de sens contraire.
- La norme de $k\overrightarrow{u}$ est $|k|$ fois celle de $\overrightarrow{u}$.
  $||k\overrightarrow{u}|| = |k| \times ||\overrightarrow{u}||$.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et pour tout réel k : $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $k\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Exemple :



Remarque : si M est le milieu d'un segment $[AB]$, alors $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Propriétés

Pour tous réels k et k', pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

- $k\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$.
- $k\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$.
- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si, et seulement si, $k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.