2^{nde} : Probabilités (finies)

Table des matières

I Vocabulaire

I.1 Expérience aléatoire

Définition

Une expérience aléatoire est une expérience renouvelable, lée au hasard, dont les résultats possibles sont connus sans qu'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

Étymologie :

- aléatoire vient du mot latin « alea » qui signifie « dés à jouer »
- On attribue l'origine du mot hasard à l'arabe « az-zahr », signifiant à l'origine « dés » et ayant pris la signification de « chance », car il désigna jusqu'au XII^{e} siècle un jeu de dés, mais aussi par métaphore tous les domaines relevant de la « science de la Chance » (Averroès). Cependant, le CNRTL signale que le terme « al-zahr » dans le sens de « dé à jouer » est relativement moderne et propose l'étymologie « yasara » (« jouer aux dés ») dont l'existence est attestée en arabe classique. [1]

Exemple : on lance une pièce de monnaie. On sait que l'on va obtenir Pile ou Face, mais on ne sait pas quel résultat on va obtenir..
Si l'on lance un dé cubique, on va obtenir un entier compris entre 1 et 6.

1. https ://fr.wikipedia.org/wiki/Hasard

I.2 Univers et éventualités

Définition

- Lors d'une expérience aléatoire, on appelle **univers**, noté Ω, l'ensemble des résultats possibles, que l'on appelle **éventualités** ou **issues**.
- Dans tout le chapitre, Ω est un ensemble fini (ne contenant qu'un nombre fini d'éléments)
- Les sous-ensembles de Ω sont appelés **événements**.
- Un événement **élémentaire** ne contient qu'un élément.
- Ω est l'événement **certain**.
- L'ensemble vide, $\varnothing$, est l'événement **impossible**.

Exemples

On lance un dé et on note le résultat de la face supérieure.
L'univers est : $\boxed{\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}}$

- « Obtenir un résultat pair » est un événement, constitué des trois éventualités $\{2 ; 4 ; 6\}$.
- « Obtenir un entier strictement inférieur à 2 » est un événement élémentaire car il n'est constitué que de 1 : $\{1\}$.
- « Obtenir un multiple de 10 » est **l'événement impossible** $\varnothing$.
- « Obtenir un entier inférieur à 7 » correspond à l'univers : on parle **d'évènement certain**.

I.3 Intersection, réunion

Définition

Soient deux événements A et B.

- On note $A \cap B$ l'intersection de A et de B, constituée des éventualités appartenant à A et à B.
- On note $A \cup B$ la réunion de A et de B, constituée des éventualités appartenant à A ou à B.

I.4 Événement contraire

Définition

On appelle événement contraire de A, noté $\overline{A}$, l'ensemble des éventualités de Ω qui ne sont pas dans A.
A et B sont incompatibles lorsque $A \cap B = \varnothing$.

II Probabilités

II.1 Lois de probabilité

Lors d'une expérience aléatoire, on cherche à mesurer le nombre de chances d'arrivées de chaque éventualité.

Définition

Soit $\Omega = \{a_1\ ;\ a_2\ ; \cdots a_n\}$ l'univers associé à une expérience aléatoire.
On définit une loi de probabilité sur Ω en choisissant des nombres $p_1,\ p_2, \ldots p_n$ tous compris entre 0 et 1, tels que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.
p_i est la probabilité de l'événement élémentaire a_i.
La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Exemple : Pour un dé non truqué, on choisit $\dfrac{1}{6}$ comme probabilité de chaque face.
La probabilité d'avoir un résultat pair est $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Exemple : une pièce de monnaie est truquée ; on s'aperçoit, en la lançant un grand nombre de Foix, que l'on a deux fois de chances due tomber sur « Pile » que sur « Face ».
L'univers ne possède que deux issues « Pile » et « face ».
Si on onte p la probabilité d'avoir « Face », celle d'obtenir « Pile » est alors $2p$.
La loi de probabilité est alors donnée par le tableau suivant :

issue	Face	Pile
Probabilité	p	2p

La somme des deux probabilités doit être égale à 1, donc $p + 2p = 3p = 1$ donne $p = \dfrac{1}{3}$.
La probabilité d'avoir « Face » est donc $\dfrac{1}{3}$.
La probabilité d'avoir « Pile » est donc $\dfrac{2}{3}$.

II.2 Lien avec les fréquences

Propriété

Si l'on effectue une expérience aléatoire n fois de suite dans les mêmes conditions, la fréquence de réalisation d'un événement se stabilise lorsque n devient très grand et se rapproche d'un nombre fixe.
Comme modèle probabiliste, on prend alors comme probabilité pour chaque événement la limite des fréquences.

III Calculs de probabilités

Définition

On dit qu'on a équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Propriété

Si l'on est dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :
$p(\text{A}) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de A}}{\text{Nombre d'éléments de }\Omega}$

Exemple : une classe de 35 élèves comprend 20 filles.
On choisit un élève au hasard et on note F l'événement « l'élève choisi est une fille ».
$p(F) = \dfrac{20}{35} = \dfrac{4}{7}$.

IV Propriétés

Propriétés

- Pour tout événement A : $0 \leqslant p(\text{A}) \leqslant 1$
- $p(\Omega) = 1$; $p(\emptyset) = 0$
- Pour deux événements A et B : $p(\text{A}\cup\text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A}\cap\text{B})$
- Si A et sont incompatibles : $p(A \cap B) = 0$ donc :
  $p(\text{A} \cup \text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B})$.
- $p(\overline{\text{A}}) = 1 - p(\text{A})$