Inéquations

Table des matières

I Comparaison de deux nombres 1
II Règle de l'addition et soustraction 1
III Règles de la multiplication et division 1
IV Les inéquations du premier degré à une inconnue 2
V Méthode de résolution 2
VI Signe de $ax+b$ 2
VII Signe d'un produit de binômes 3
VIII Résolution d'une inéquation-quotient 4

I Comparaison de deux nombres

Propriété

$a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

Pour comparer deux nombres (c'est-à-dire savoir lequel est le plus grand), on étudie le signe de la différence.

Quelques règles sur les inégalités

II Règle de l'addition et soustraction

Règle 1

Soient a, b et c trois réels alors :

- $a \leqslant b \Leftrightarrow a + c \leqslant b + c$
- $a \leqslant b \Leftrightarrow a - c \leqslant b - c$

Exemples :

- $2x + 4 \leqslant 0 \iff 2x + 4 \mathbf{-4} \leqslant 0 \mathbf{-4} \iff 2x \leqslant -4$
- $3x - 2 < -3 \iff 3x - 2 \mathbf{+2} < -3 \mathbf{+2} \iff 3x < -1$

III Règles de la multiplication et division

Règle 2

Soient a, b deux réels et c un réel **positif** alors :

- $a \leqslant b \iff a \times c \leqslant b \times c$
- $a \leqslant b$ et $c \neq 0 \iff \dfrac{a}{c} \leqslant \dfrac{b}{c}$

Démonstration : puisque $a \leqslant b$: $b-a \geqslant 0$.
Pour comparer les deux nombres, on étudie le signe de leur différence :
Alors $bc - ac = c(b-a) \geqslant 0$ car $b-a \geqslant 0$ et $a \geqslant 0$, donc $\boxed{ac \leqslant bc}$.
De même : $\dfrac{b}{c} - \dfrac{a}{c} = \dfrac{b-a}{c} \geqslant 0$. Puisque $b-a \geqslant 0$ et $c \geqslant 0$ donc $\boxed{\dfrac{a}{c} \leqslant \dfrac{b}{c}}$.

Exemples :

- $2x > 7 \Leftrightarrow 2x \times \mathbf{3} > 7 \times \mathbf{3} \Leftrightarrow 6x > 21$
- $3x \leqslant 4 \Leftrightarrow \dfrac{3x}{4} \leqslant \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \boxed{x \leqslant \dfrac{4}{3}}$
- $x\sqrt{2} \geqslant 3 \Leftrightarrow \dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \geqslant \dfrac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Règle n° 3

Soient a, b deux réels et c un réel négatif ou nul alors :

- $a \leqslant b \iff a \times c \geqslant b \times c$ (Changement de sens de l'inégalité)
- et $a \leqslant b$ et $c < 0 \iff \dfrac{a}{c} \geqslant \dfrac{b}{c}$ (Changement de sens de l'inégalité)

Même démonstration que dans le cas $c \geqslant 0$.

Exemples :

- $-x > 4 \iff -x \times (\mathbf{-1}) < 4 \times (\mathbf{-1}) \iff x < -4$
- $-4x < -3 \iff \dfrac{-4x}{-4} > \dfrac{-3}{-4} \iff x > \dfrac{3}{4}$
- $-2x \geqslant 6 \iff \dfrac{-2x}{-2} \leqslant \dfrac{6}{-2} \iff x \leqslant -3$

IV Les inéquations du premier degré à une inconnue

V Méthode de résolution

- $x + a \leqslant b \Leftrightarrow x + a - a \leqslant b - a \Leftrightarrow x \leqslant b - a$
- $x - a \leqslant b \Leftrightarrow x - a + a \leqslant b + a \Leftrightarrow x \leqslant b + a$
- Si $a > 0$: $ax \leqslant b \Leftrightarrow \dfrac{ax}{a} \leqslant \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{b}{a}$
- Si $a < 0$: $ax \leqslant b \Leftrightarrow \dfrac{ax}{a} \geqslant \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{b}{a}$
- Si $a > 0$: $\dfrac{x}{a} \leqslant b \Leftrightarrow \dfrac{x}{a} \times a \leqslant b \times a \Leftrightarrow x \leqslant ab$
- Si $a < 0$: $\dfrac{x}{a} \leqslant b \Leftrightarrow \dfrac{x}{a} \times a \geqslant b \times a \Leftrightarrow x \geqslant ab$

VI Signe de $ax+b$

On considère la fonction affine $f = x \mapsto ax+b$.
Si $a>0$, la fonction est croissante et si $a<0$, a fonction est décroissante.
$ax+b=0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$.
On en déduit le signe de $ax+b$:

Cas a > 0 :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

Cas a < 0 :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

VII Signe d'un produit de binômes

On appelle binôme une expression du type $ax+b$ (ou polynôme du premier degré).

Propriété fondamentale

- Le produit de deux nombres de même signe est positif.
- Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif

Méthode :
Pour étudier le signe d'une produit de binômes :

- on étudie le signe de chacun d'entre eux,
- on récapitule tout cela dans un tableau de signes (une ligne par binôme)
- puis dans la dernière ligne, on trouve le signe du produit en appliquant la règle en appliquant la règle sur le signe d'un produit.

Exemple : étudions le signe de $A(x) = -x(2x-3)(x+6)(4-2x)$

- Cherchons les valeurs de x qui annulent chacun des quatre binômes de $A(x)$:
- $-x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $2x-3=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ et $2x-3>0 \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}$
- $x+6=0 \Leftrightarrow x=-6$ et $x+6>0 \Leftrightarrow x>-6$
- $4-2x=0 \Leftrightarrow x=2$ et $4-2x>0 \Leftrightarrow -2x>-4 \Leftrightarrow x<2$ (en divisant par -2 qui est négatif, d'où le changement de sens de l'inégalité)
- Dressons maintenant le tableau des signes de $A(x)$:

x	$-\infty$		-6		0		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$2x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$4-2x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

- **Conclusion** :
$A(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;\,-6[\cup \left]0\,;\,\dfrac{3}{2}\right[\cup]2\,;\,+\infty[$
$A(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [-6\,;\,0[\cup \left]\dfrac{3}{2}\,;\,2\right[$

VIII Résolution d'une inéquation-quotient

Exemple 1 : Résoudre $\dfrac{-3x+7}{2x+3} \leqslant 0$.

- **Ensemble de définition** : on ne peut pas diviser par 0, donc le dénominateur $2x+3$ doit être non nul.
Or, $2x+3=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$.
On en déduit que l'ensemble de définition est $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.
- On cherche alors le signe de chaque facteur :
  - ◇ $-3x+7=0 \Leftrightarrow -3x=-7 \Leftrightarrow x=\dfrac{-7}{-3}=\dfrac{7}{3}$.
  $-3x+7>0 \Leftrightarrow -3x>-7 \Leftrightarrow x<\dfrac{7}{3}$.
  - ◇ $2x+3>0 \Leftrightarrow 2x>-3 \Leftrightarrow x>-\dfrac{3}{2}$
- Reste à renseigner un tableau de signes.
⚠**Attention**, il y a une valeur interdite, qu'on code avec une double barre en dessous de $-\dfrac{3}{2}$ dans le tableau

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$\frac{7}{3}$	$+\infty$
Signe de $-3x+7$	$+$	‖	$-$		$-$
Signe de $2x+3$	$-$	‖	$-$	0	$+$
Signe de $\dfrac{-3x+7}{2x+3}$	$-$	‖	$+$	0	$-$

- **Conclusion** : on voulait que le quotient fût négatif ou nul : l'ensmrlbe des solutions est
$\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right[\cup \left[\dfrac{7}{3}\,;\,+\infty\right[}$

Exemple 2 : résoudre $\dfrac{7x+5}{x^2-4} \geqslant 0$.

- **Ensemble de définition** : $x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$ qui s'annule en -2 et 2.
Nous avons donc deux valeurs interdites, -2 et 2.
$\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;\,2\}$.
- Signe de $7x+5$
$7x+5=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{7}$.
$x \mapsto 7x+5$ est croissante puisque le coefficient directeur est $7>0$ donc $7x+5$ prend d'abord des valeurs négatives puis positives. D'où $7x+5<0 \Leftrightarrow x<-\dfrac{5}{7}$ et $7x+5>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{5}{7}$.

- Signe de $x+2$:
  $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ et $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$.
- Signe de $x-2$:
  $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ et $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$.
- **Tableau de signes** :
  Il y a deux valeurs interdites, -2 et 2.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{5}{7}$		2		$+\infty$
Signe de $7x+5$		$-$	‖	$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $x+2$		$-$	‖	$+$	|	$+$	|	$+$	
Signe de $x-2$		$-$	‖	$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $\frac{7x+5}{x^2-4}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

- **Conclusion** : on veut que le quotient soit positif ou nul.
  $\boxed{\mathscr{S}=\left]-2\,;\,-\frac{5}{7}\right]\cup[2\,;\,+\infty[}$