Fonction carré, fonction cube, fonction inverse,, fonction racine carrée

Table des matières

I Fonction carré 1
  I.1 Définition 1
  I.2 Variations 1
  I.3 Courbe représentative 2
  I.4 Application 3
II Fonction inverse 4
  II.1 Définition 4
  II.2 Variations 5
  II.3 Courbe représentative 6
  II.4 Application 6
III Fonction cube 7
IV Fonction racine carrée 8

I Fonction carré

I.1 Définition

Définition

On appelle fonction carré la fonction $x \mapsto x^2$

Propriété

La fonction carré $x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Cette fonction est paire (pour tout x, f(-x)=f(x)), donc la courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy).

Justification :
En effet, on peut calculer x^2 pour n'importe quelle valeur de $x \in \mathbb{R}$.
et pout tout x, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

I.2 Variations

Propriété

$f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Démonstration :

- Sur $[0\,;\,+\infty[$: soient deux réels x_1 et x_2 quelconques de $[0\,;\,+\infty[$ avec $0 \leqslant x_1 < x_2$.
  Il s'agit de comparer les nombres $f(x_1) = x_1^2$ et $f(x_2) = x_2^2$.
  $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = \underbrace{(x_2 + x_1)}_{>0} \times \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}$ donc $f(x_1) < f(x_2)$.
  En effet, $x_2 + x_1 > 0$ comme somme de nombres positifs et $x_2 - x_1 > 0$ car on a supposé $x_1 < x_2$.
  Les images sont classées dans le même ordre que les antécédents, donc f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

- Sur $]-\infty\,;\,0]$: soient deux réels x_1 et x_2 quelconques de $]-\infty\,;\,0]$ avec $x_1 < x_2 \leqslant 0$.
  On a le même calcul : $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 + x_1)}_{<0} \times \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} < 0$ ($x_1 + x_2 < 0$) car les deux nombres sont négatifs.
  Les images cette fois sont classées dans l'ordre inverse des antécédents : la fonction est décroissante.

  Remarque : sur $]-\infty\,;\,0]$, on aurait pu utiliser la parité de la fonction et la symétrie de la courbe par rapport l'axe des ordonnées.

  Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

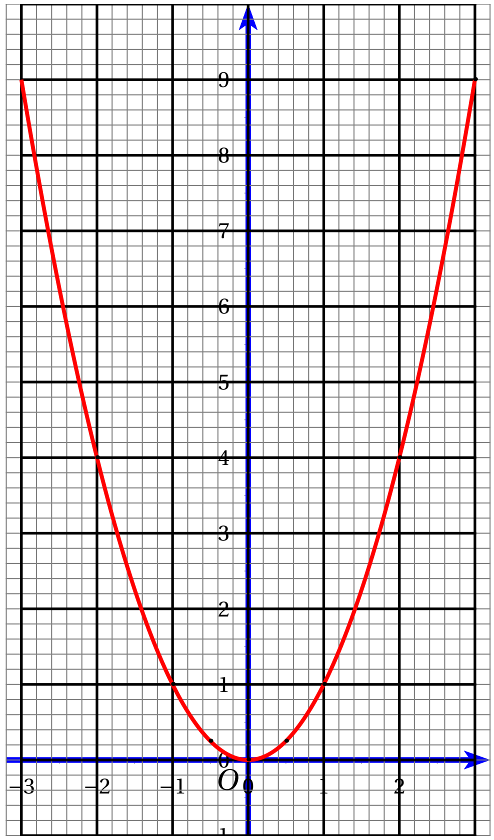
I.3 Courbe représentative

Pour tracer la courbe, on calcule des coordonnées de points (il en faut plus que deux, puisque la courbe n'est pas une droite). Comme la courbe est symétrique, on se limite à des points dont les abscisses sont des valeurs positives et on construit ensuite les points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

En général, on prend ces cinq valeurs positives :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x) = x^2$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

La courbe représentative de la fonction carré est appelée **parabole**. il faut la tracer la plus régulière possible.



I.4 Application

Exercice : comparer les carrés des nombres suivants :

a) $0,2^2$ et $0,21^2$

b) $(-2,4)^2$ et $(-2,41)^2$

c) $(-3,1)^2$ et $4,2^2$

Solution :

a) 0,2 et 0,21 sont positifs; sur $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction $f : x \mapsto x^2$ est croissante.
$0,2 < 0,21$ donc $f(0,2) < f(0,21)$ donc $\boxed{0,2^2 < 0,21^2}$

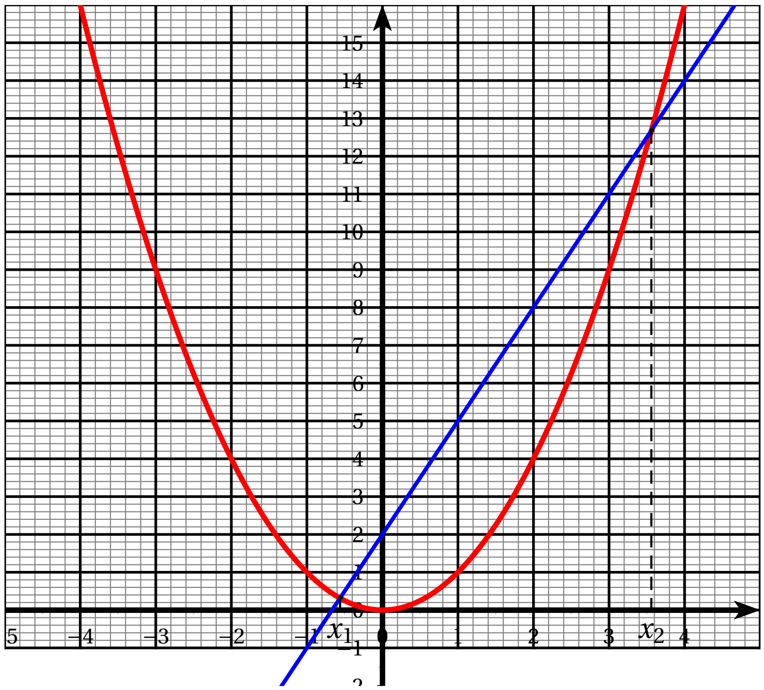
b) -2,4 et -2,41 sont négatifs; sur $]-\infty\ ;\ 0]$, f est décroissante.
$-2,4 > -2,41$; comme f est décroissante, f renverse l'ordre, donc $\boxed{(-2,4)^2 < -2,41^2}$.

c) $(-3,1)^2 = 3,1^2$ donc il suffit de comparer $3,1^2$ et $4,2^2$.
3,1 et 4,2 sont positifs et $3,1 < 4,2$; sur $[0\ ;\ +\infty[$, f est croissante, donc $3,1^2 < 4,2^2$, d'où $\boxed{(-3,1)^2 < 4,2^2}$

Exercice : résoudre graphiquement l'équation $x^2 = 3x+2$.
On pose $f(x) = x^2$ et $g(x) = 3x+2$.

On trace les courbes représentatives de ces fonctions. Les solutions éventuelles de cette équation sont les abscisses des points d'intersubsection de ces deux courbes.

Puisqu'il s'agit d'une lecture graphique, les valeurs trouvées sont des valeurs approchées des solutions. la méthode pour trouver les valeurs exactes sera vue en Première.



On trouve deux solutions : $x_1 \approx -0,5$ et $x_2 \approx 3,6$

II Fonction inverse

II.1 Définition

Définition

On appelle fonction inverse la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Propriété

La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.

La fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est impaire, c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \neq 0$.

La courbe représentative de f est donc symétrique par rapport à O.

Démonstration

- f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à O.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$

II.2 Variations

Propriété

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
⚠ : attention, on ne peut parler de variation que sur un intervalle; il est faux de dire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^*$: par exemple : $-2 < 2$; $f(-2) = -\dfrac{1}{2}$, $f(2) = \dfrac{1}{2}$ donc $f(-2) < (2)$

Démonstration :

- Sur $[0\ ;\ +\infty[$: soient deux réels x_1 et x_2 quelconques de $]0\ ;\ +\infty[$ avec $0 < x_1 < x_2$.
  Il s'agit de comparer les nombres $f(x_1) = \dfrac{1}{x_1}$ et $f(x_2) = \dfrac{1}{x_2}$.
  $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$.
  $x_1 - x_2 < 0$ car $x_1 < x_2$; $x_1 x_2 > 0$ comme produit de nombres positifs. Les images sont classées dans l'ordre inverse des antécédents, donc f est **décroissante** sur $]0\ ;\ +\infty[$.

- Sur $]-\infty\ ;\ 0[$: soient deux réels x_1 et x_2 quelconques de $]-\infty\ ;\ 0[$ avec $\leqslant x_1 < x_2 < 0$.
  On a le même calcul : $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$.
  $x_1 - x_2 < 0$ car $x_1 < x_2$; $x_1 x_2 > 0$ comme produit de nombres négatifs. Les images sont classées dans l'ordre inverse des antécédents, donc f est **décroissante** sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

Remarque : sur $]-\infty\ ;\ 0]$, on aurait pu utiliser la symétrie de la courbe par rapport à O.

Tableau de variation :

0 est une valeur interdite, donc il faut mettre une double-barre en dessous de 0.

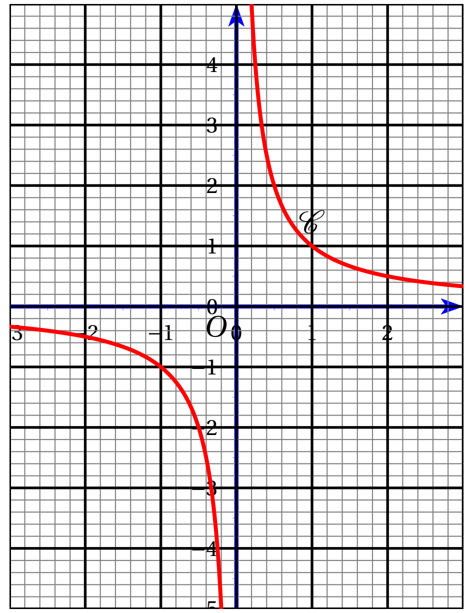
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

II.3 Courbe représentative

Pour tracer la courbe, on trace la partie correspondant à des abscisses positives en calculant les coordonnées de quelques points.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x) = \frac{1}{x}$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

La courbe représentative de la fonction inverse est appelée **hyperbole**. Elle est constituée de deux branches (**symétriques** par rapport à l'origine O).



II.4 Application

Exercice : comparer les nombres suivants :

a) $\frac{1}{0,2}$ et $\frac{1}{0,3}$

b) $-\frac{1}{2,4}$ et $-\frac{1}{2,5}$

c) $-\frac{1}{3,1}$ et $\frac{1}{4,2}$

Solution :

a) 0,2 et 0,3 sont positifs; sur $]0\ ;\ +\infty[$, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante.

$0,2 < 0,3$ donc $f(0,2) > f(0,3)$ donc $\boxed{\frac{1}{0,2} > \frac{1}{0,3}}$

b) -2,4 et -2,5 sont négatifs; sur $]-\infty\ ;\ 0[$, f est décroissante.

$-2,4 > -2,5$; comme f est décroissante, f renverse l'ordre, donc $\boxed{(-\frac{1}{2,4}) < -\frac{1}{2,5}}$.

c) $-3,1 < 0$ et $4,2 > 0$ donc $-\frac{1}{3,1} < 0$ et $\frac{1}{4,2} > 0$ donc $\boxed{-\frac{1}{3,1} < \frac{1}{4,2}}$.

Remarque : ici, on ne pouvait pas utiliser les variations de la fonction inverse, car les nombres -3,1 et 4,2 ne sont par dans les mêmes intervalles de définition de la fonction inverse.

III Fonction cube

Définition

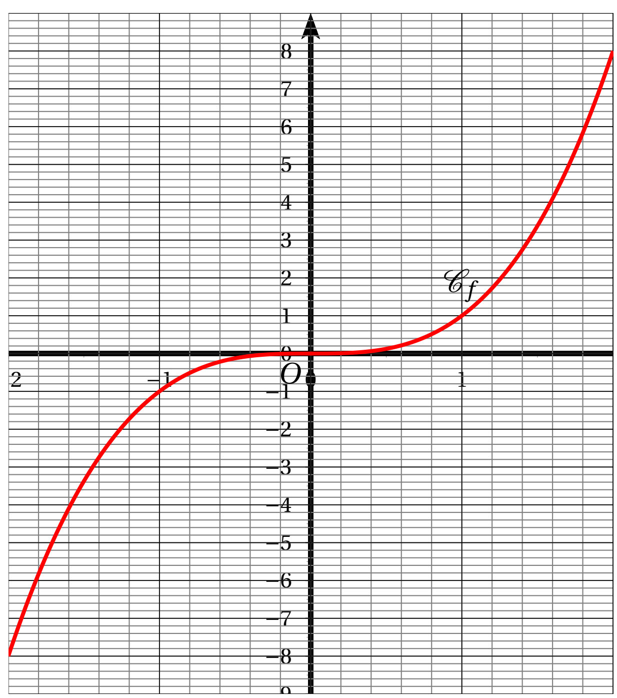
On appelle fonction cube la fonction $f : x \mapsto x^3$

Propriétés

- Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$
- Elle est impaire (f(-x)=-f(x) pour tout x) (donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine O)
- Elle est croissante sur $\mathbb{R}$

Le tableau de variation est

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$



IV Fonction racine carrée

Définition

On appelle fonction racine carrée la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$

Propriétés

- Cette fonction est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ (car on ne peut calculer la racine carrée que d'un nombre positif)
- Elle est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

Le tableau de variation est

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$

Démonstration de la croissance : Soient deux nombfres x_1 et x_2 quelconques, vérifiant $0 \leqslant x_1 < x_2$ (donc $x_2 - x_1 > 0$)
On doit comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$ en étudiant le signe de la différence $f(x_2) - f(x_1)$.
$f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \dfrac{\left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right) \times \left(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}\right)}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} = \dfrac{\sqrt{x_2}^2 - \sqrt{x_1}^2}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} = \dfrac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}$.
Le numérateur est positif car $x_1 < x_2$.
Le dénominateur $\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}$ est positif comme somme de deux nombres positifs.
Par conséquent : $f(x_2) - f(x_1) > 0$ d'où $f(x_1) < f(x_1)$.
'f respecte l'ordre donc f est croissante.

Courbe représentative :