

# Fonctions affines

## Table des matières

I	Définition : . . . . .	1
II	Variations . . . . .	1
III	Signe d'une fonction affine . . . . .	2
IV	Représentation graphique d'une fonction affine . . . . .	3
V	Caractérisation d'une fonction affine . . . . .	3
VI	Comment tracer graphiquement la représentation graphique d'une fonction affine? . . . . .	4
VI.1	À partir de deux points : . . . . .	4
VI.2	En utilisant le coefficient directeur . . . . .	5
VII	Caractérisation d'une fonction affine . . . . .	6

## I Définition :



### Définition

Une fonction  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , est affine s'il existe deux réels  $m$  et  $p$  tel que, pour tout  $x$ ,  $f(x) = mx + p$ .  
 $m$  s'appelle le coefficient directeur et  $p$  est l'ordonnée à l'origine.

### Exemples :

- $f : x \mapsto 2x + 3$  est une fonction affine car  $2x + 3 = mx + p$  avec  $\begin{cases} m = 2 \\ p = 3 \end{cases}$ .
- $f : x \mapsto \frac{3x+5}{7}$  est une fonction affine car  $\frac{3x+5}{7} = \frac{3}{7}x + \frac{5}{7} = mx + p$  avec  $\begin{cases} m = \frac{3}{7} \\ p = \frac{5}{7} \end{cases}$ .

- $f : x \mapsto 5x$  est une fonction affine car  $5x = mx + p$  avec  $\begin{cases} m = 5 \\ p = 0 \end{cases}$

On dit alors que  $f$  est **linéaire** (fonction affine dont l'ordonnée à l'origine est égale à 0)

- $f : x \mapsto 8$  est une fonction affine car  $5x = mx + p$  avec  $\begin{cases} m = 5 \\ p = 0 \end{cases}$ .

Cette fonction est une fonction **constante**.

- $f : x \mapsto 3x^2 + 7$  n'est pas une fonction affine car il n'existe pas de nombres  $m$  et  $p$  constants tels que  $mx + p = 3x^2 + 7$  pour tout  $x$ . (à cause de  $x^2$ )

**Remarque :** l'ensemble de définition d'une fonction affine est  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

En effet, on peut calculer  $mx + p$  pour tout  $x$  réel.

## II Variations

### Théorème

Soit  $f$  une fonction affine définie par :  $f(x) = mx + p$ .

- $f$  est croissante si, et seulement si,  $m > 0$ .
- $f$  est constante si, et seulement si,  $m = 0$ .
- $f$  est décroissante si, et seulement si,  $m < 0$ .

**Démonstration :** Soient deux nombres quelconques  $x_1$  et  $x_2$ , avec  $x_1 < x_2$ .

$f(x) = mx + p$  donc  $f(x_1) = mx_1 + p$  et  $f(x_2) = mx_2 + p$

$f(x_2) - f(x_1) = (mx_2 + p) - (mx_1 + p) = mx_2 + p - mx_1 - p = mx_2 - mx_1 = m(x_2 - x_1)$ .

Comme  $x_2 - x_1$  est positif, puisque, par hypothèse,  $x_1 < x_2$ ,  $f(x_2) - f(x_1)$  est du signe de  $m$ .

Si  $m > 0$ ,  $x_1 < x_2$  entraîne que  $f(x_1) < f(x_2)$ , donc  $f$  **respecte l'ordre** et  $f$  est **croissante**.

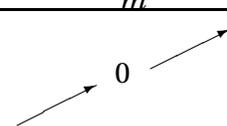
Si  $m = 0$ ,  $f$  est constante, car, pour tout  $x$ ,  $f(x) = 0x + p = p$ .

Si  $m < 0$ ,  $x_1 < x_2$  entraîne que  $f(x_1) > f(x_2)$ , donc  $f$  **renverse l'ordre** et  $f$  est **décroissante**.

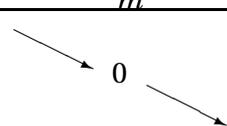
**Remarque :** Soit  $f : x \mapsto mx + p$  une fonction affine, avec  $m \neq 0$ .  $f(x) = 0 \Leftrightarrow mx + p = 0 \Leftrightarrow mx = -p \Leftrightarrow x = -\frac{p}{m}$ .

On en déduit les **tableaux de variations** possibles de  $f$ , selon le signe de  $m$ .

Pour  $m > 0$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
$f(x)$			

Pour  $m < 0$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
$f(x)$			

## III Signe d'une fonction affine

D'après les tableaux de variation d'une fonction affine, on en déduit les tableaux de signes suivants :

Cas :  $m > 0$

$x$	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
$f(x) = mx + p$	-	0	+

Cas :  $m < 0$

$x$	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
$f(x) = mx + p$	+	0	-

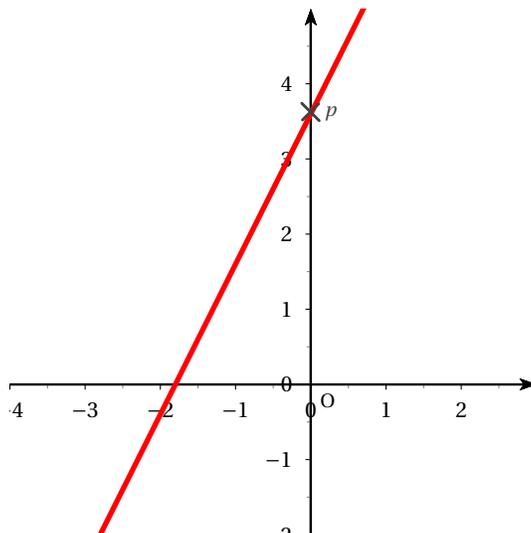
## IV Représentation graphique d'une fonction affine



### Propriété (admise)

Soit  $f : x \mapsto mx + p$  une fonction affine. La représentation graphique d'une fonction affine est une droite, sécante à l'axe des ordonnées.  $m$  est le coefficient directeur et  $p$  l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire que la droite passe par le point de coordonnées  $(0 ; p)$  (car  $f(0) = p$ )

### Interprétation graphique de $p$ :



**Remarque** : toute droite sécante à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

## V Caractérisation d'une fonction affine

### Interprétation graphique de $m$ :

Soit  $f : x \mapsto mx + p$  une fonction affine dont la représentation graphique est la droite  $\mathcal{D}$ .

Soient  $A(x_A ; y_A)$  et  $B(x_B ; y_B)$  deux points distincts de  $\mathcal{D}$ .

Par définition de  $f$ , on a  $f(x_A) = y_A$  et  $f(x_B) = y_B$ .

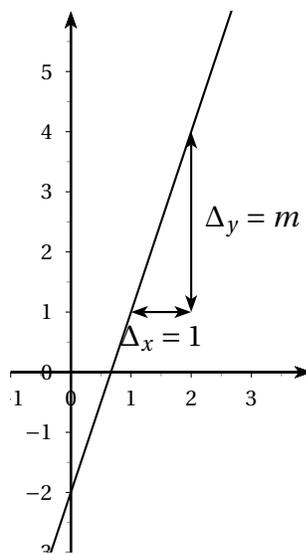
$$f(x_B) = f(x_A) = (mx_A + p) - (mx_B + p) = mx_A + p - mx_B - p = m(x_B - x_A). \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ donc } \Delta y = m\Delta x.$$

On en déduit :  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ .

Symboliquement, on note  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  où  $\Delta$  signifie « différence », donc il faut comprendre  $\Delta y$  comme « différence des abscisses ».

Si l'on prend  $\Delta x = 1$ , on a  $\Delta y = m$ .

On en déduit que si l'on se déplace de 1 unité parallèlement à l'axe des abscisses, on se déplace en même temps de  $a$  parallèlement à l'axe des ordonnées.



**Remarque :** si l'on se déplace de  $k$  unités parallèlement à l'axe des abscisses, on se déplace dans le même temps de  $km$  unités parallèlement à l'axe des ordonnées.

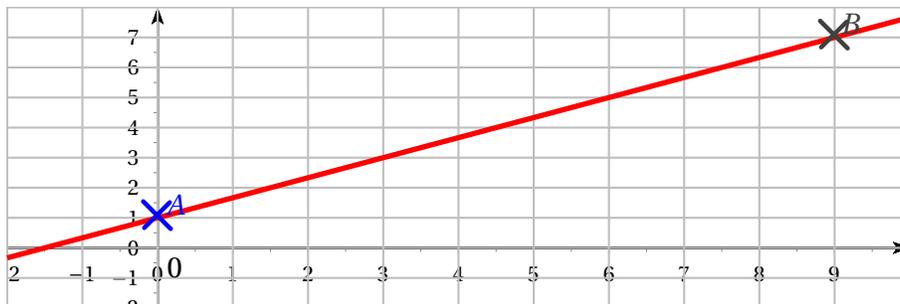
C'est lié au **théorème de Thalès** !

## VI Comment tracer graphiquement la représentation graphique d'une fonction affine ?

### VI.1 À partir de deux points :

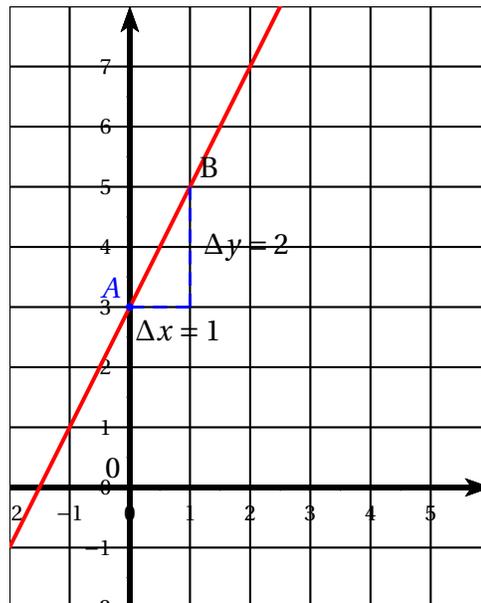
**Exemple :** on veut représenter graphiquement la fonction affine  $f : x \mapsto \frac{2}{3}x + 1$ . On sait que la représentation graphique de  $f$  est une droite. Pour tracer une droite, il suffit de connaître deux points de celle-ci. On calcule alors les coordonnées de deux points de cette droite, en essayant d'avoir des coordonnées entières, pour qu'elles soient faciles à placer. L'ordonnée à l'origine vaut 1, donc la droite passe par le point de coordonnées  $(0 ; 1)$ . On remarque qu'il suffit de prendre  $x$  multiple de 3 ( $x$  pas trop proche de 0, pour accroître la précision du tracé.) On remplit un tableau :

x	0	9
$y = \frac{2}{3}x + 1$	1	$\frac{2}{3} \times 9 + 1 = 7$



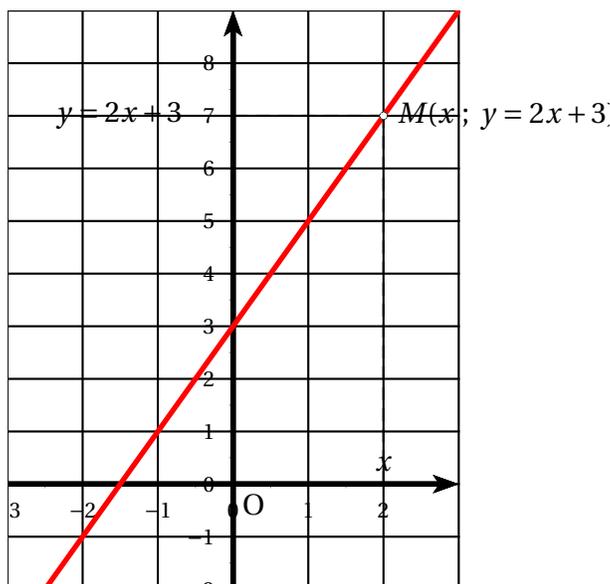
## VI.2 En utilisant le coefficient directeur

**Exemple :** représenter graphiquement la fonction affine  $x \mapsto 2x + 3$ . L'ordonnée à l'origine est 3, donc la droite passe par le point A de coordonnées (0 ; 3). Le coefficient directeur est 2, donc  $2 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , c'est-à-dire  $\Delta y = 2\Delta x$ . On choisit par exemple  $\Delta x = 1$ ; on obtient alors  $\Delta y = 2 \times 1 = 2$ . En partant de A, on se déplace de 1 en abscisses, et alors de 2 en ordonnées.



**Remarque :** La représentation graphique d'une fonction affine  $f \mapsto ax + b$  est une droite (sécante à l'axe de l'axe des ordonnées ( $Oy$ )); on dit que cette droite a pour **équation réduite**  $y = ax + b$ .

**Exemple :** La droite d'équation  $y = 2x + 3$  est la représentation graphique de la fonction  $f \mapsto 2x + 3$ .



**Exemple :** Trouver l'équation de la droite passant par les points A(2 ; 5) et B(7 ; -1). C'est la même chose que de chercher la fonction affine  $f$  vérifiant  $f(2) = 5$  et  $f(7) = -1$ . Notons  $m$  le coefficient directeur et  $p$  l'ordonnée à l'origine.  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 5}{7 - 2} = -\frac{6}{5}$ . L'équation de la droite est alors  $y = -\frac{6}{5}x + p$ . A appartient à la droite (AB) donc ses coordonnées vérifient cette équation :  $y_A = -\frac{6}{5}x_A + p$  donc  $5 = -\frac{6}{5} \times 2 + p$ . D'où  $-\frac{12}{5} + p = 5$

et  $p = 5 + \frac{12}{5} = \frac{25 + 12}{5} = \frac{37}{5}$ . L'équation de la droite (AB) est  $y = -\frac{6}{5}x + \frac{37}{5}$ .

## VII Caractérisation d'une fonction affine



### Théorème

$f$  est une fonction affine si, et seulement si, l'accroissement  $\Delta y$  de l'image est proportionnel à l'accroissement  $\Delta x$  de la variable. Autrement dit,  $x_1$  et  $x_2$  étant deux réels distincts,  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$  où  $m$  est un nombre constant.

**Démonstration :** Si  $f$  est une fonction affine,  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$ .

**Réciproque :** Soit  $f$  une fonction telle que, pour tous  $x_1$  et  $x_2$ ,  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$ . Alors, en particulier, pour  $x$  et 0, on a :  $\frac{f(x) - f(0)}{x} = p$  d'où, en posant  $f(0) = p$ ,  $f(x) = mx + p$ .

**Application :** on connaît les images de deux nombres par une fonction affine et l'on veut l'image d'un troisième nombre, sans trouver l'expression de la fonction affine :

$x$	2	4	7
$f(x)$	-1	5	

Puisque  $f$  est affine, on a :  $\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2}$  donc  $\frac{5 - (-1)}{4 - 2} = \frac{f(7) - (-1)}{7 - 2}$ , soit  $\frac{6}{2} = \frac{f(7) + 1}{5}$ . Par conséquent :  $3 = \frac{f(7) + 1}{5}$  donc  $f(7) + 1 = 3 \times 5 = 15$  d'où  $f(7) = 15 - 1 = 14$  :  $f(7) = 14$ .