Équations d'une droite ; systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

Table des matières

I Exemples préliminaires

On rappelle que deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy'-x'y=0$ (condition de colinéarité).

1. On considère les points $A(2;3)$ et $B(5\,;\,-7)$ et $M(x\,;\,y)$.
   On cherche une relation liant x et y traduisant l'appartenance de M à la droite (AB).
   On a vu dans un chapitre précédent que l'alignement des points A, B et M se traduise par exemple par la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\end{pmatrix}$.
   On applique la condition de colinéarité : on doit avoir $3(y-3)-(-10)(x-2)=0$ d'où $10x+3y-29=0$.
   On peut mettre cette relation sous la forme $3y=-10x+29$ puis $\boxed{y=-\dfrac{10}{3}x+\dfrac{29}{3}}$ qui est de la forme $y=ax+b$, donc $y=f(x)$ en posant $f(x)=ax+b$ qui est une fonction affine.

2. On considère les points $A(2;3)$ et $B(2\,;\,-9)$ et $M(x\,;\,y)$.
   On cherche une relation liant x et y traduisant l'appartenance de M à la droite (AB).
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-12\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\end{pmatrix}$.
   La condition de colinéarité entre ces deux vecteurs donne $0(y-3)+12(x-2)=0$; donc $12(x-2)=0$ d'où $\boxed{x=2}$, de la forme $x=k$ où k est un réel.
   Cette droite est parallèle à l'axe des ordonnées ; tous les points de cette droite ont la même abscisse, 2.

   Remarque : une telle droite n'a pas de coefficient directeur.

II Caractérisation analytique d'une droite

Définition

Soit $\mathscr{D}$ une droite. On appelle équation cartésienne d'une droite une relation entre les coordonnées x et y d'un point quelconque de la droite $\mathscr{D}$.

Propriété

Soit $\left(O\,;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ un repère du plan.
Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan.

- Si $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées, alors l'équation de $\mathscr{D}$ est de la forme $x = k$, où k est un nombre réel. (tous les points de $\mathscr{D}$ ont la même abscisse)
- Si $\mathscr{D}$ est sécante à l'axe des ordonnées, alors l'équation de $\mathscr{D}$ est de la forme $y = ax + b$ (équation **réduite**), où a et b sont deux nombres réels.
  a est appelé le coefficient directeur de la droite d.
  b est appelé l'ordonnée à l'origine de la droite $\mathscr{D}$.

  On remarque que la fonction $f : x \mapsto ax + b$ est alors une fonction affine.

La démonstration générale se fait comme l'exemple préliminaire, en utilisant la colinéarité de deux vecteurs :

Exemples :

1. Donner une équation cartésienne de la droite (AB) où A et B ont pour coordonnées $A(3\,;\,5)$ et $B(3\,;\,7)$.
2. même question avec $A(3\,;\,8)$ et $B(-1\,;\,5)$.

Solutions :

1. A et B ont même abscisse, donc une équation de (AB) est $x = k$. Comme $x_A = 3$, une équation de (AB) est $\boxed{x = 3}$.
2. A et B n'ont pas la même abscisse, donc (AB) est sécante à l'axe des ordonnées.
   Son équation réduite est de la forme $y = ax + b$.
   $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3}{4}$.
   L'équation réduite est $y = \dfrac{3}{4}x + b$.
   A appartient à la droite, donc ses coordonnées vérifient l'équation (ou celles de B).
   $y_A = \dfrac{3}{4}x_A + b$ donc $b = 8 - \dfrac{3}{4} \times 3 = 8 - \dfrac{9}{4} = \dfrac{23}{4}$.
   L'équation réduite est $\boxed{y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{23}{4}}$.

III Position relative de deux droites

III.1 Droites parallèles

Propriété

Soient deux droites d et d' toutes deux sécantes à l'axe des ordonnées, d'équations réduite $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.
d et d' sont parallèles si, et seulement si, $a = a'$.

Démonstration Soient deux points A et B de la droite d; les droites passant par A et B et parallèles à l'axe des ordonnées coupent d' en A' et B'.
On a donc $x_A = x_{A'}$ et $x_B = x_{B'}$
$d \parallel d' \iff$ ABB'A' est un parallélogramme $\iff [AB']$ et $[A'B]$ ont le même milieu
$\iff . \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x_{A'} + x_B}{2} = \dfrac{x_A + x_{B'}}{2} \\ \dfrac{y_{A'} + y_B}{2} = \dfrac{y_A + y_{B'}}{2} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x_B - x_A = x_{B'} - x_{A'} \\ y_B - y_A = y_{B'} - y_{A'} \end{array} \right.$
$\iff \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{Y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}}$ car $x_{A'} = x_A$ et $x_{B'} = x_B$.
$\iff m = m'$.

III.2 Droites sécantes

Propriété

Soient $d : y = ax + b$ et $d' : y = a'x + b'$ deux droites dans un plan muni d'un repère.
Les droites d et d' sont sécantes si, et seulement si, $a \neq a'$.
Dans ce cas, les deux droites ont un point d'intersection, donc les coordonnées vérifient le système $\left\{ \begin{array}{l} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{array} \right.$.

Exemple
Soient $d : y = 2x - 3$ et $d' : y = -3x + 5$.
Montrer que d et d' sont sécantes et déterminer les coordonnées du point d'intersection..

Les deux coefficients directeurs, 2 et -3 sont différents, donc les deux droites sont sécantes.
Pour trouver les cordonnées du point d'intersection, on résout le système : $\left\{ \begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ y = -3x + 5 \end{array} \right.$.

$\left\{ \begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ y = -3x + 5 \end{array} \right. \iff y = 2x - 3$

$2x - 3 = -3x + 5 \iff \left\{ \begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ x = \dfrac{8}{5} \end{array} \right.$.

On en déduit $x = \dfrac{8}{5}$ et $y = 2x - 3 = 2 \times \dfrac{8}{5} - 3 = \dfrac{1}{5}$.

IV Résolution de systèmes de deux équations linéaires

IV.1 Définitions

Définition

On appelle équation linéaire à deux inconnues une équation du type $ax+by=c$, où a, b, c sont des réels appelés coefficients ; x et y sont les inconnues avec a et b non tous les deux nuls.

Un couple $(x\ ;\ y)$ est solution de cette équation si, et seulement si, l'égalité $ax+by+c=0$ est vraie.

On appelle système de deux équations linéaires à deux inconnues l'ensemble formé par deux équations, quidoivent être vérifiées simultanément ; un couple $(x\ ;\ y)$ est solution du système si, et seulement si, il est solution de chacune des équations.

Remarque : une équation linéaire peut-être vue comme l'équation d'une droite.

- si $b=0$, l'équation $ax+by=c$ s'écrit $ax=c$ d'où, comme a ne peut être lui aussi nul, $x=\dfrac{c}{a}$, donc l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
- Si $b \neq 0$, $ax+by=c \iff by=-ax+c \iff y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{a}$ qui est l'équation d'une droite de sécante à l'axe des ordonnées, de coefficient directeur égal à $-\dfrac{b}{a}$.

IV.2 Méthode par combinaison

On considère un système $\begin{cases} ax+by=c\ (E) \\ a'x+b'y=c'\ (E') \end{cases}$ avec a et b pas tous les deux nuls, de même que a' et b', donc $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ et $(a';\ b') \neq (0\ ;\ 0)$.

- On multiplie l'une des équations ou les deux par un (ou des) nombre(s) pour se ramener à un même coefficient, au signe près, pour x ou pour y. (même méthode que pour trouver un dénominateur commun à deux fractions)
- On additionne ou soustrait alors les deux équations pour faire disparaître une des inconnues.
- On obtient alors une équation du premier degré que l'on résout.
- On utilise une des équations initiales (la plus simple) pour trouver la valeur de l'autre inconnue (ou on applique la même méthode en travaillant sur l'autre inconnue).

Exemple

Résoudre le système $\begin{cases} 2x+3y=5\ (E_1) \\ 3x-2y=7\ (E_2) \end{cases}$

On multiple (E_1) par 3 et (E_2) par 2.
On obtient $\begin{cases} 6x+9y=15\ \left(E_1'\right) \\ 6x-4y=14\ \left(E_2'\right) \end{cases}$.
On soustrait par exemple $\left(E_1'-E_2'\right)$:
On obtient $(6x+9y)-(6x-4y)=15-14 \iff 13y=1$.

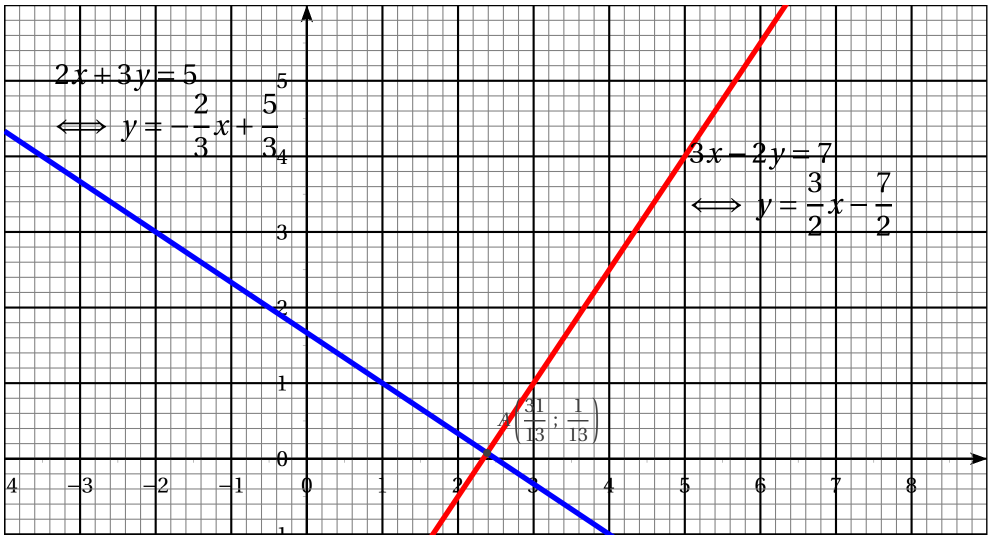
On en déduit $y = \dfrac{1}{13}$.

On remplace y par $\dfrac{1}{13}$ dans l'équation (E_1).

$2x + 3 \times \dfrac{1}{13} = 5$ donc $2x = 5 - 3 \times \dfrac{1}{13} = 5 - \dfrac{3}{13} = \dfrac{65-3}{13} = \dfrac{62}{13}$ donc $x = \dfrac{\frac{62}{13}}{2} = \dfrac{31}{13}$

L'ensemble des solutions du système est le couple $\left(\dfrac{31}{13} ; \dfrac{1}{13}\right)$. $\mathscr{S} = \left\{\left(\dfrac{31}{13} ; \dfrac{1}{13}\right)\right\}$.

Interprétation géométrique : ce couple représente les coordonnées du point d'intersection des deux droites dont les équations sont les deux équations du système.



IV.3 Méthode de résolution par substitution

Conseil : N'utilisr cette méthode que si l'un des coefficients de x ou y vaut 1 ou -1.
On part d'une des équations : on exprime une des inconnues en fonction de l'autre (en évitant d'introduire une fraction).
On remplace alors dans l'autre équation par ce que l'on a trouvé.

Exemple

Résoudre $\left\{\begin{array}{l} x+3y=5 \ (E_1) \\ 5x-2y=13 \ (E_2) \end{array}\right.$

E_1 s'écrit $x = -3y + 5$.
On remplace x par $-3y+5$ dans la seconde équation.
On obtient $5(-3y+5) - 2y = 13 \iff -15y + 25 - 2y = 13 \iff -17y = -12 \iff y = \dfrac{12}{17}$
On remplace alors dans la première équation : $x = -3y + 5 = -3 \times \dfrac{12}{17} + 5 = \dfrac{49}{85}$.

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\left(\dfrac{49}{85} ; \dfrac{12}{17}\right)\right\}}$