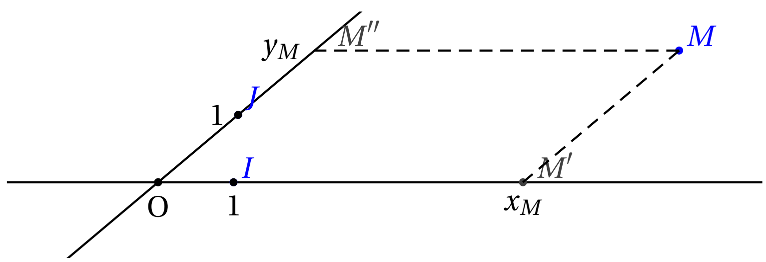
Fonctions : généralités

Table des matières

I Rappel sur les coordonnées

Pour repérer un point dans le plan, on trace deux droites sécantes en un point O. Ces deux droites sont appelées axes.
Sur chaque axe, on choisit une unité de longueur en plaçant deux points I et J.
On dit alors que $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ est un repère du plan.



On prend un point M quelconque ; on trace deux droites passant par M et parallèle aux axes ; elles coupent ces deux axes en M' et M'', qui sont repérés par deux nombres x et y. x est l'abcisse de M et y l'ordonnée de M.
x et y sont alors les coordonnées de M ; on écrit $M(x\ ;\ y)$.

Définition

- On dit que le repère est orthogonal si, et seulement si, les deux axes sont orthogonaux.
- On dit que le repère est orthonormal si, et seulement si, les deux axes sont orthogonaux et l'unité sur les deux axes est la même ($OI = OJ$).

II Notion de fonction

Définition

Soit $\mathscr{D}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles.
Une fonction numérique f, définie sur $\mathscr{D}$, est un procédé qui, à chaque nombre de x de $\mathscr{D}$ associe un **unique** nombre, noté $f(x)$.
$\mathscr{D}$ est l'ensemble de définition de f ; c'est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe.
Le réel x est appelé la **variable**. $f(x)$ est **l'image** de x par f.
x est un antécédent de $f(x)$.
On écrit : $f : \begin{array}{l} \mathscr{D} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ ou plus simplement : $f : x \longmapsto f(x)$.

Exemples :

1. On enregistre la température en un endroit précis sur une période de 24 heures. $T : x \mapsto y = T(x)$ où $T(x)$ est la pression à l'instant x.
2. On enregistre la hauteur d'eau dans un port en fonction de l'heure (elle varie en fonction de la marée).
3. $v(x)$ est la vitesse d'une voiture à x km de son point de départ sur un circuit automobile .
4. $f(x)$ est la carré du nombre x : Sur $\mathbb{R}$: $f : x \mapsto x^2$.
5. $\mathscr{D} =]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,=\infty[$: $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$
   $\dfrac{1}{x}$ n'existe que si $x \neq 0$ car on ne peut pas diviser par 0.
   Remarque : $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ se note aussi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou $\mathbb{R}^*$
6. $\mathscr{D} = [0\,;\,+\infty[$: $f : x \mapsto \sqrt{x}$
7. $\mathscr{D} =]0,1[$. $p\ :\ x \mapsto y = p(x)$ où y est la première décimale de x.
   On a alors $p\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3$, $p(0,123) = 1$

Remarques

- Un nombre ne peut avoir qu'une seule image par une fonction f.
- Un nombre peut avoir **plusieurs** antécédents par f ; exemple : pour $f(x) = x^2$, on a $f(-2) = f(2) = 4$ donc 4 a deux antécédents par f

Exemples :

1. Sur $\mathbb{R}$, on considère la fonction $f : x \mapsto 3x^2 + 5x - 4$.
   Calculer les images de 0, 3, 5 et -1.
   - $f(0) = 3 \times 0^2 + 5 \times 0 - 4 = -4$
   - $f(3) = 38$
   - $f(5) = 3 \times 5^2 + 5 \times 5 - 4 = 96$
   - $f(-1) = 3 \times (-1)^2 + 5 \times (-1) - 4 = -5$

2. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. $g(x) = x^2$.
Quels sont les antécédents de -4 ? de 2 ?
-1 a-t-il des antécédents ?

Réponses :
x est un antécédent de -4 si $g(x) = -4$, donc $x^2 = -4$.
Or, $x^2 \geqslant 0$ donc x^2 ne peut pas être égal à -4 qui est négatif.
-4 n'a pas d'antécédent.
Les antécédents de 2 sont les nombres x tels que $x^2 = 2$, donc $x^2 = 2$.
2 a donc pour antécédents $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
(**rappel** : pour $a \geqslant 0$, l'équation $x^2 = a$ possède deux solutions, $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$; en effet, $x^2 = a$ s'écrit $x^2 - a = 0$, d'où $x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = 0$ soit $\left(x + \sqrt{a}\right)\left(x - \sqrt{a}\right) = 0$ après factorisation ; on a bien les deux solutions proposées, en utilisant le fait qu'une produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.)

x est un antécédent de -1 si et seulement si $g(x) = -1$, donc si et seulement si $x^2 = -1$, ce qui est impossible car $x^2 \geqslant 0$.
-1 n'a pas d'antécédent par g.

III Courbe représentative

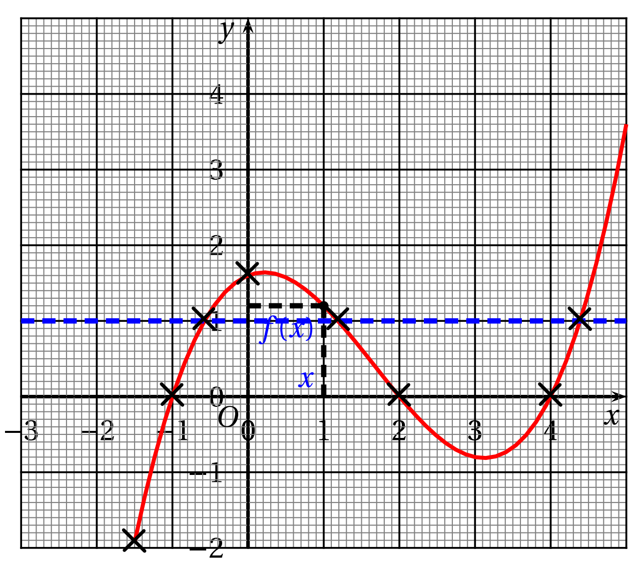
Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$.
La courbe $\mathscr{C}_f$, représentative de f, est l'ensemble des points $M(x\,;\,f(x))$ où $x \in \mathscr{D}$.

x est donc l'abscisse et $f(x)$ l'ordonnée d'un point M de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exemple :

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1,5\,;\,5]$



Lecture d'une image : Quelles sont les images de -1.5 ? de -1 ? de 0 ? de 1 ? de 2 ?
L'image de $-1,5$ est environ égale à -1,9 ; $\boxed{f(-1,5) \approx -1,9}$
L'image de -1 est 0 : $\boxed{f(-1) = 0}$
L'image de 0 est 1,6 : $\boxed{f(0) = 1,6}$
De même : $f(1) = 1,2$; $\boxed{f(2) = 0}$

Lecture d'un antécédent : Quelles sont les antécédents de 0 ? de 1 ? de 2 ? de 4 ?
Pour lire les antécédents de 0, on regarde les abscisses des points de la courbe qui ont 0 pour ordonnée :
Les antécédents de 0 sont -1, 2 et 4.

Antécédents de 1 : approximativement -0,5 ; 1,2 et 4,4.

Antécédents de 4 : il n'y en a pas sur l'intervalle considéré.

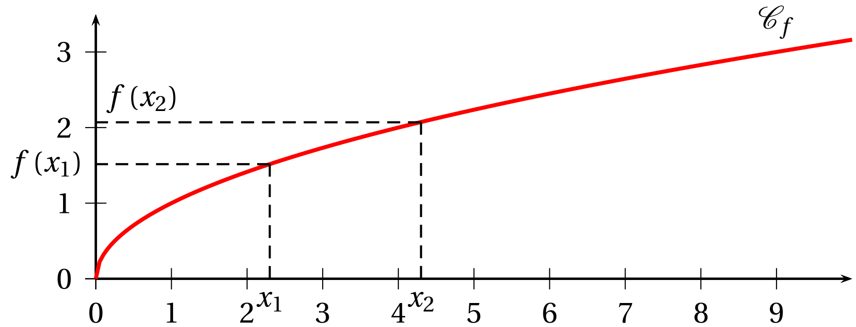
IV Variations d'une fonction

IV.1 Sens de variation

Définition

Une fonction f est croissante sur un intervalle I signifie que sur l'intervalle I, si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images $f(x)$ augmentent aussi.
Traduction mathématique : Pour tous x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leqslant x_2$, alors $f(x_1 \leqslant f(x_2$.
(une fonction croissante **conserve l'ordre**.)

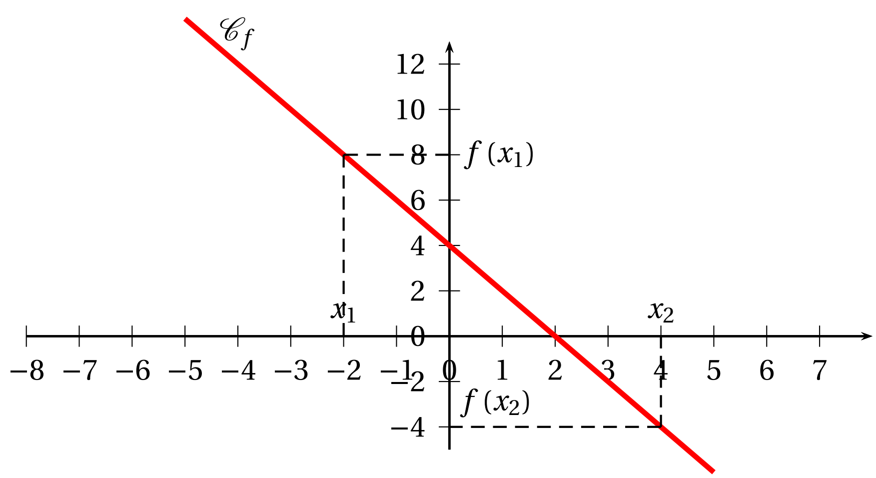
Illustration graphique :



Définition

Une fonction f est décroissante sur un intervalle I signifie que sur l'intervalle I, si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images $f(x)$ diminuent.
Traduction mathématique : Pour tous x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leqslant x_2$, alors $f(x_1 \geqslant f(x_2$.
(une fonction croissante renverse l'ordre.)

Illustration graphique :



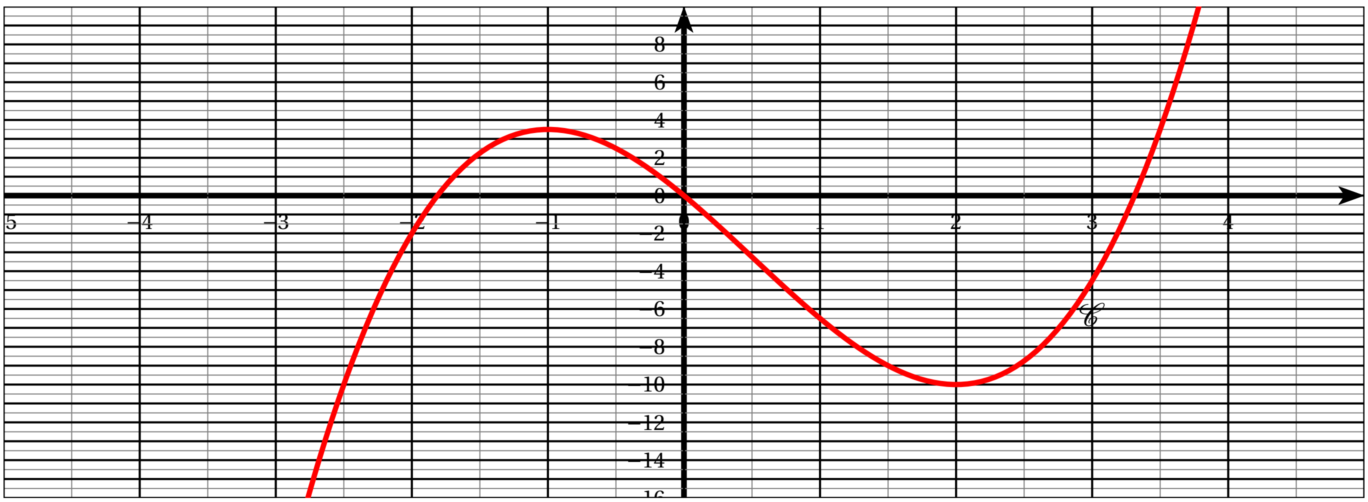
IV.2 Tableau de variation d'une fonction

Un tableau de variation sert à rassembler visuellement toutes les informations sur les variations d'une fonction.

Exemples :

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 12x}{2}$.

   La courbe représentative est

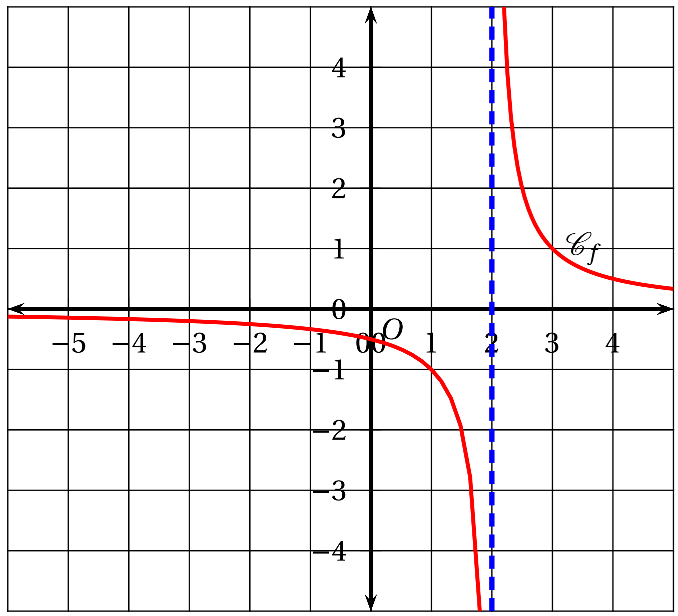


   Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f(x)$		$3,5$		$+\infty$
	$-\infty$		-10	

   Une flèche montante indique que la fonction est croissante, une flèche descendante indique que la fonction est décroissante.

2. Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$



La fonction f n'est **pas définie** en $x = 2$. 2 est une valeur **interdite**.
L'ensemble de définition de f est $\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$.
On traduit cette situation par une **double barre verticale** dans le tableau de variation et une ligne pointillée dans le graphique. (On verra cela en détail dans le chapitre sur la fonction inverse.)
La fonction est décroissante sur $]-\infty\,;\,2[$ et sur $]2;+\infty[$. Quand x tend vers $-\infty$, $f(x)$ se rapproche de plus en plus de 0, de même que quand x tend vers $+\infty$. Le tableau de variation est :

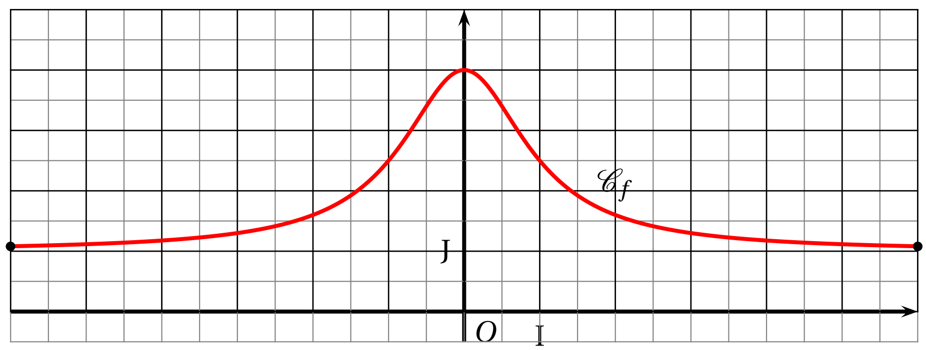
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

IV.3 Extremum :

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$.
f admet un maximum en $a \in \mathscr{D}$ si, pour tout x de $\mathscr{D}$, $f(x) \leqslant f(a)$. f admet un minimum en $a \in \mathscr{D}$ si, pour tout x de $\mathscr{D}$, $f(x) \geqslant f(a)$.
f admet un extremum en a si f admet un maximum ou un minimum.

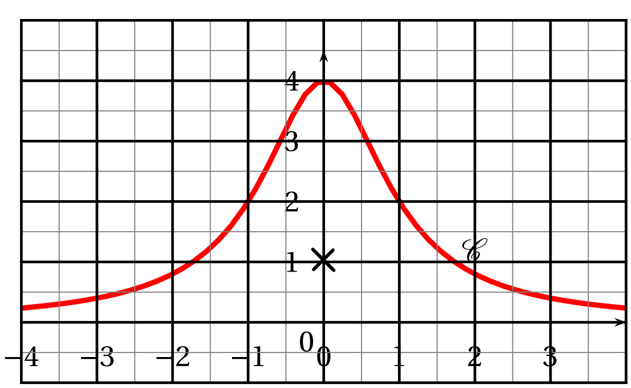
Exemple : Soit la fonction f définie sur $[-6\ ;\ 6]$ par $f(x) = 1 + \dfrac{3}{x^2+1}$ dont voici la courbe représentative :



Cette fonction est croissante sur $]-6\ ;\ 0]$ et décroissante sur $[0\ ;\ 6[$.
Le maximum de $f(x)$ est 4, atteint en 0 ($f(0) = 4$).
$f(-6) = f(6) = \dfrac{40}{37}$. Le minimum est $\dfrac{40}{37}$, atteint en -6 et 6.
Le tableau de variation est :

x	-6		0		6
$f(x)$	$\dfrac{40}{37}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\dfrac{40}{37}$

Exemple : Voici la courbe représentative de $f : x \mapsto \dfrac{4}{(x^2+1)}$, définie sur $\mathbb{R}$.



Le maximum est 1, atteint en 0, mais f n'a pas de minimum (0 n'est l'image d'aucun nombre).