2^{nde} : correction du TD du 22 septembre

I Vrai ou faux ?

1. Tout nombre décimal est un rationnel. **VRAI** Rappel : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
2. L'inverse d'un décimal non nul est un décimal. **FAUX**
   Exemple : 3 est décimal non num, mais son inverse est $\dfrac{1}{3}$ qui n'est pas un décimal.
3. L'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel. **VRAI**. En effet : soit x un rationnel non nul ; il s'écrit sous la forme $\dfrac{a}{b}$ où a et b sont des entiers relatifs non nuls.
   L'inverse de x est alors $\dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$ qui le quotient de deux entiers donc aussi un nombre rationnel.

II

- Pour que le nombre soit divisible par 2, son chiffre des unités doit être 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Pour que le nombre soit divisible par 3, la somme de ses chiffres doit être divisible par 3.
- Pour que le nombre ne soit pas divisible par 9, la somme de ses chiffres ne doit être divisible par 9.

Un nombre possible est 30 000

III

1. Montrons que la somme de trois entiers naturels consécutifs est toujours divisible par 3.
   Soit x le nombre intermédiaire ; les trois nombres sont alors $x-1$, c et $x+1$.
   Leur somme est alors $(x-1)+x+(x+1) = \boxed{3x}$ qui est bien divisible par 3.
2. Montrons que la somme de cinq entiers naturels consécutifs est toujours divisible par 5.
   Appelons de même x le nombre intermédiaire.
   Les cinq nombres sont alors $x-2$, $x-1$, x, $x+1$ et $x+2$.
   La somme vaut $(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2) = \boxed{5x}$ qui est divisible par 5.

IV

Calculer et simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{1 \times 3}{3 \times 5} - \frac{2}{7} = \frac{3}{10} - \frac{2}{7} = \frac{3 \times 7 - 10 \times 2}{10 \times 7} = \boxed{\frac{1}{70}}.$$

$$B = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{5}}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{\frac{1\times5+2\times3}{2\times5}}{\frac{6-5}{6}} = \frac{\frac{11}{10}}{\frac{1}{6}} = \frac{11}{10} \times 6 = \frac{11 \times \cancel{2} \times 3}{\cancel{2} \times 5} = \boxed{\frac{33}{5}}$$

$$C = (-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = \boxed{16}$$

$$D = -2^4 = (-1) \times 2^4 = (-1) \times 16 = \boxed{-16}$$

V

1. $48 = 1§ \times 3 = \boxed{2^4 \times 3}$.
2. $144 = 3 \times 48 = 3 \times \left(2^4 \times 3\right) = \boxed{2^4 \times 3^2}$.
3. • Pour $n = 2$, $48n = 2^4 \times 3^2 \times 2 = 2^5 \times 3$ qui n'est pas un carré.

   • Pour $n = 3$ car alors, $48n = 48 \times n = 2^4 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = \left(2^2 \times 3\right)^2$ qui est un carré (carré d'un nombre entier)

On dit qu'un nombre est parfait si la somme de ses diviseurs est égale au double du nombre lui-même.

1. • L'ensemble des diviseurs de 6 est $\mathscr{D}(6) = \{1 ; 2 ; 3 ; 6\}$.
   $1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \times 6$ donc 6 est parfait.

   • L'ensemble des diviseurs de 28 est $\mathscr{D}(28) = \{1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28\}$.
   $1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \times 56$ donc 28 est un nombre parfait.
2. Au III^e^ siècle avant J.-C., Euclide a donné la formule donnant tous les nombres parfaits pairs. Ce sont les nombres de la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$, où n est un entier naturel premier et $2^n - 1$ est également un nombre premier.
   Donner les trois premiers nombres parfaits que cette formule permet de trouver.

   • $n = 2$; 2 est premier et $2^n - 1 = 2^2 - 1 = 3$ qui est premier, donc $2 \times \left(2^2 - 1\right) = 2 \times 3 = 6$ qui est bien parfait (voir 1)).
   $n = 3$; 3 est premier et $2^n - 1 = 2^3 - 1 = 7$ qui est premier, donc $2^2 \times \left(2^3 - 1\right) = 4 \times 7 = 28$ qui est bien parfait (voir 1)).
   $n = 5$; 5 est premier et $2^5 - 1 = 31$ qui est premier donc $2^4\,(2 - 5 - 1) = 16 \times 31 = 496$

   Remarque : les nombres parfait sont rares. on n'en connaît actuellement que 40 (dont 3 inférieurs à 1 000).
   Le plus grand connu possède 12 640 858 chiffres et est égal à : $2^{20996010}\left(2^{20996011} - 1\right)$..
   (*Remarque : on n'a toujours pas trouvé de nombre parfait impair ; on sait seulement que s'il existe, il aurait un facteur premier supérieur à 300 000 et il serait supérieur à* 10^{300} *!*)
   On ne sait pas non plus si le nombre de nombres parfaits est fini ou infini.
   Pour en savoir davantage, voir ici

VI Somme de puissances de 2

1. $2^{n+1} - 2^n = 2^n\,(2 - 1) = 2^n \times 1 = 2^n$.
2. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^{100} = 2^0 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^{100}$
   $= \left(2^1 - 2^0\right) + \left(2^2 - 2^1\right) + \left(2^3 - 2^2\right) + \cdots + \left(2^{100} - 2^{99}\right) + \left(2^{101} - 2^{100}\right) = 2^{101} - 2^0 = \boxed{2^{101} - 1}$.
   Remarque : ce nombre vaut :
   2 535 301 200 456 458 802 993 406 410 751