2nde : Correction du TD (vecteurs, fonctions affines, développements)

I

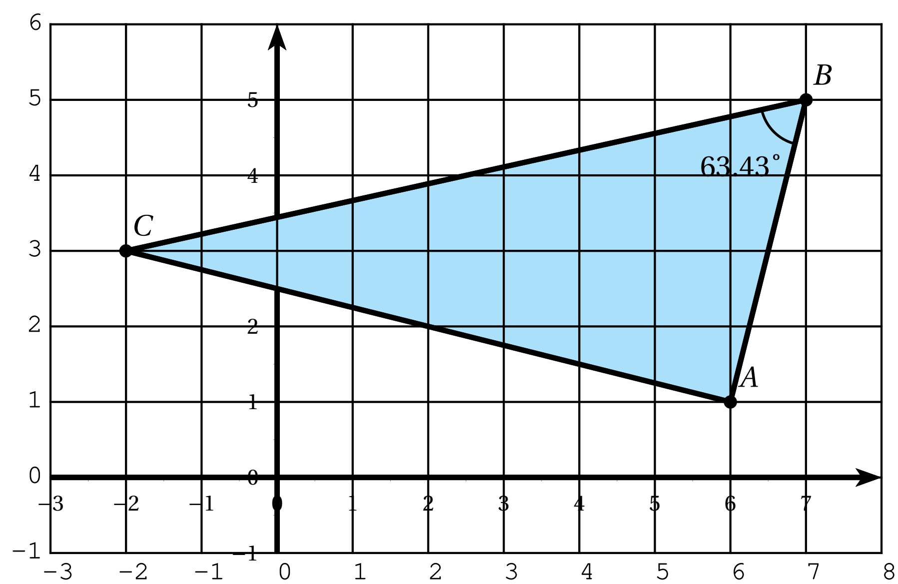
On considère les points $A(6\ ;\ 1)$, $B(7\ ;\ 5)$ et $C(-2\ ;\ 3)$.

1.
   - Calcul de AB :
     $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7-6=1\\5-1=4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ d'où $AB=\sqrt{1^2+4^2}=\boxed{\sqrt{17}}$
   - Calcul de BC :
     $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2-7=-9\\3-5=-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-9\\-2\end{pmatrix}$ d'où $BC=\sqrt{(-9)^2+(-2)^2}=\boxed{\sqrt{85}}$
   - Calcul de AC :
     $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2-6=-8\\3-1=2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix}$ d'où $AC=\sqrt{(-8)^2+2^2}=\boxed{\sqrt{68}}$

   On a : $BC^2=85$ et $AB^2+AC^2=17+68=85$ donc $BC^2=AB^2+AC^2$.
   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A.

2. $\cos\left(\widehat{ABC}\right)=\dfrac{\text{côté adjacent à }\widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{85}}=\sqrt{\dfrac{17}{85}}=\sqrt{\dfrac{1}{5}}$ donc $\boxed{\widehat{ABC}\approx 63,4^\circ}$.

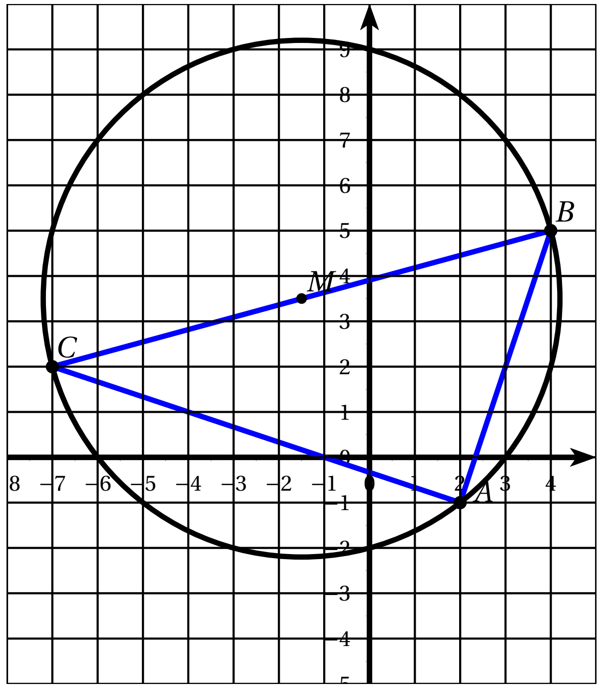
Figure (non demandée) :



II

On considère les points A(2 ; –1), B(4 ; 5) et C(–7 ; 2).

1. Figure :



2. Soit M, le milieu du segment $[BC]$.
   On sait que $x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{4-7}{2} = -\dfrac{3}{2}$ et $y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{5+2}{2} = \dfrac{7}{2}$.
   Par conséquent : $\boxed{M\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{7}{2}\right)}$.

3. • Calcul de MA :
   $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} 2-\left(-\dfrac{3}{2}\right) \\ -1-\dfrac{7}{2}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} \dfrac{7}{2} \\ -\dfrac{9}{2}\end{pmatrix}$; on en déduit $MA = \sqrt{\left(\dfrac{7}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{49}{4} + \dfrac{81}{4}} = \sqrt{\dfrac{130}{4}}$; $\boxed{MA = \sqrt{\dfrac{130}{4}}}$.

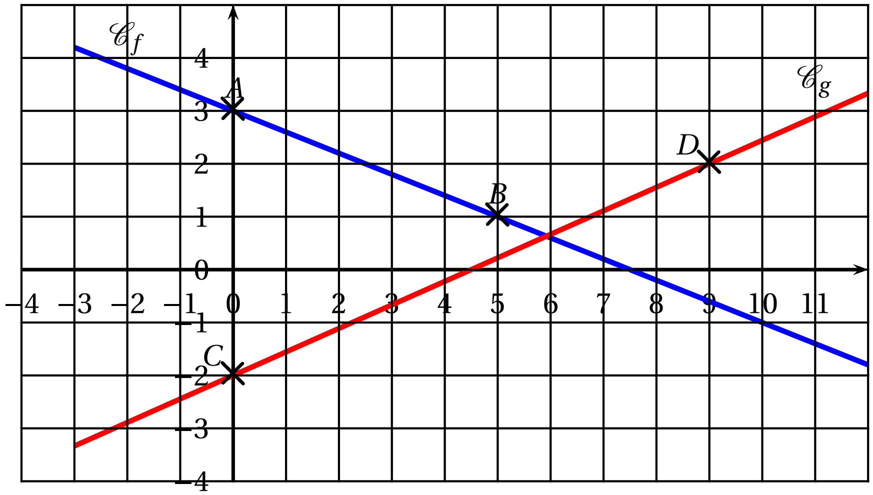
   • Calcul de MB :
   $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} 4-\left(-\dfrac{3}{2}\right) \\ 5-\dfrac{7}{2}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} \dfrac{11}{2} \\ \dfrac{9}{2}\end{pmatrix}$; on en déduit $MB = \sqrt{\left(\dfrac{11}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{121}{4} + \dfrac{9}{4}} = \sqrt{\dfrac{130}{4}}$; $\boxed{MB = \sqrt{\dfrac{130}{4}}}$.

   • Calcul de MC : $MB = MC$ puisque M est le milieu de [BC]

4. On en déduit que $MA = MB = MC = \sqrt{\dfrac{130}{4}}$; M est donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ; or M est le milieu de l'hypoténuse $[BC]$ donc ABC est un **triangle rectangle**.

III

Ci-dessous sont représentées deux fonctions affines f et g.



1. Prenons des points A, B, C et D sur les deux droites (voir figure)
   - Pour $\mathscr{C}_f$: l'ordonnée à l'origine est $p = y_A = 3$.
     Le coefficient directeur est $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-3}{5-0} = -\dfrac{2}{5}$.
     On en déduit que $f(x) = -\dfrac{2}{5}x + 3$.
   - Pour $\mathscr{C}_g$: l'ordonnée à l'origine est $p' = y_C = -2$.
     Le coefficient directeur est $m' = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_B} = \dfrac{2-(-2)}{9-0} = \dfrac{4}{9}$.
     On en déduit que $f(x) = \dfrac{4}{9}x - 2$.
2. (a) Résoudre l'équation : $-\dfrac{2}{5}x + 3 = \dfrac{4}{9}x - 2$.
   On en déduit : $-\dfrac{2}{5}x - \dfrac{4}{9}x = -2 - 3$ en soustrayant $\dfrac{4}{9}x$ et 3 de chaque côté.
   D'où : $-\dfrac{38}{45}x = -5$ qui donne $x = \dfrac{-5}{-\frac{38}{45}} = 5 \times \dfrac{45}{38} = \boxed{\dfrac{225}{38}}$.
   (b) L'équation s'écrit $f(x) = g(x)$. La solution est donc **l'abscisse du point d'intersection des deux droites**.

IV

Développer les expressions suivantes :

$A(x) = (2x+3)(5x+7) = 2x \times 5x + 2x \times 7 + 3 \times 5x + 21 = 10x^2 + 14x + 15x + 21 = \boxed{10x^2 + 29x + 21}$.

$B(x) = (3x-5)(7x+2) = 3x \times 7x + 3x \times 2 - 5 \times 7x - 5 \times 2 = 21x^2 + 6x - 35x - 10 = \boxed{21x^2 - 29x - 10}$.

$C(x) = (3x-5)(7x+2) = 3x \times 7x + 3x \times 2 - 5 \times 7x - 5 \times 2 = 21x^2 + 6x - 35x - 10 = \boxed{21x^2 - 29x - 10}$

$D(x) = (3x-5)(4x-7) = 3x \times 4x - 3x \times 7 - 5 \times 4x + 5 \times 7 = 12x^2 - 21x - 20x + 35 = \boxed{12x^2 - 41x + 35}$

$E(x) = (3x+7)(5x-8) - (2x-3)(3x-8) = [3x \times 5x - 3x \times 8 + 7 \times 5x - 7 \times 8] - [2x \times 3x - 2x \times 8 - 3 \times 3x + 3 \times 8]$
$= \left[15x^2 - 24x + 35x - 56\right] - \left[6x^2 - 16x - 9x + 24\right]$
$= \left[15x^2 + 11x - 56\right] - \left[6x^2 - 25x + 24\right]$
$= 15x^2 + 11x - 56 - 6x^2 + 25x - 24$
$= \boxed{9x^2 + 36x - 80}$.