2^{nde} : TD du 22 septembre

I Vrai ou faux ?

1. Tout nombre décimal est un rationnel.
2. L'inverse d'un décimal non nul est un décimal.
3. L'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel.

II

Écrire un nombre naturel de cinq chiffres divisible par 2 et par 3, mais non divisible par 9.

III

1. Montrer que la somme de trois entiers naturels consécutifs est toujours divisible par 3.
2. Montrer que la somme de cinq entiers naturels consécutifs est toujours divisible par 5.

IV

Calculer et simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} - \frac{2}{7}$$

$$B = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{5}}{1 - \frac{5}{6}}$$

$$C = (-2)^4$$

$$D = -2^4$$

V

1. Écrire la décomposition de 48 en produit de facteurs premiers.
2. En déduire la décomposition de 144 et de 480 en produit de facteurs premiers.
3. Trouver le plus petit entier naturel non nul n tel que $48n$ soit un carré.

VI Nombres parfaits

On dit qu'un nombre est parfait si la somme de ses diviseurs est égale au double du nombre lui-même.

1. Vérifier que 6 et 28 sont parfaits.
2. Au III$^{\text{e}}$ siècle avant J.-C., Euclide a donné la formule donnant tous les nombres parfaits pairs. Ce sont les nombres de la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$, où n est un entier naturel non nul tel que $2^n - 1$ soit un nombre premier.
   Donner les trois premiers nombres parfaits que cette formule permet de trouver.

   (*Remarque : on n'a toujours pas trouvé de nombre parfait impair ; on sait seulement que s'il existe, il aurait un facteur premier supérieur à 300 000 et il serait supérieur à* 10^{300} *!*)

VII Somme de puissances de 2

1. Vérifier, pour tout entier naturel n, l'égalité : $2^n = 2^{n+1} - 2^n$.
2. En déduire une expression plus simple de la somme : $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^{100}$.