Différents ensembles de nombres

Table des matières

I Nombres entiers naturels

Définition

On appelle nombre entier **naturel** un nombre entier positif ou nul ; les entiers naturels sont les nombres servant à compter les objets (0 n'a été considéré comme nombre que tardivement).
L'ensemble des entiers naturels se note $\mathbb{N}$.
$\mathbb{N} = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\cdots\}$

Remarque : le symbole 0 a été utilisé par les Babyloniens (il y a plus de 2000 ans, les Mayas, les Indiens ; il signifiait l'absence d'unité dans la numération de position (celle que nous utilisons) pour indiquer l'absence d'une unité ; dans l'utilisations des chiffres romains (notation de juxtaposition), le symbole 0 n'existe pas. 0 est apparu en occident grâce aux arabes, notamment par la traduction du mathématicien Al-Kwarismi.
Pour les curieux : cliquer ici : Histoire du nombre zéro.

II Nombres relatifs

II.1 Ensemble $\mathbb{Z}$

Définition

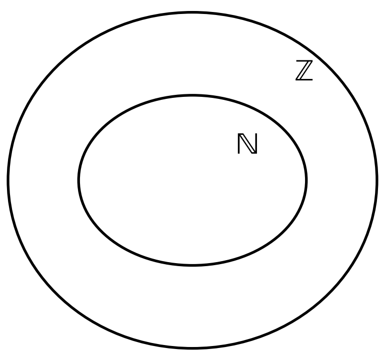
Un entier relatif est un nombre entier positif ou négatif ou nul.
L'ensemble des entiers relatifs se note $\mathbb{Z}$. C'est l'ensemble des entiers naturels auquel on adjoint leur opposés.
$\mathbb{Z} = \{\cdots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 \cdots\}$.
Remarque : Z est l'initiale du mot allemand Zahl qui veut dire nombre.

Tous les entiers relatifs sont naturels ; l'ensemble des entiers relatifs est **inclus** dans celui des entiers naturels ; on écrit $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}}$.

Remarques de notation.

- 6 est un nombre naturel. on écrit $\boxed{6 \in \mathbb{N}}$. (On lit « 6 appartient à $\mathbb{N}$ »)
- 6 est aussi un entier relatif; on écrit $\boxed{6 \in \mathbb{Z}}$. (« 6 appartient à $\mathbb{Z}$ »)
- -3 est un entier relatif : on écrit $\boxed{-3 \in \mathbb{Z}}$ mais $-3 \notin \mathbb{N}$ (-3 n'appartient pas à l'ensemble des entiers naturels).
- 7,2 n'est pas un entier naturel : on écrit $\boxed{7,2 \notin \mathbb{N}}$.

Schématiquement :



⚠ : Ne pas confondre les symboles $\in$ et $\subset$.
Un ensemble est inclus dans un ensemble plus grand ; un ensemble est constitué d'éléments ; chaque élément de cet ensemble appartient à cet ensemble.
Exemple : une classe de seconde notée A est constituée de deux sous-ensembles, l'ensemble des garçons de la classe, noté G et l'ensemble des filles, noté F. Hugo (noté H est un garçon de la classe)
On a $G \subset A$, $F \subset A$, $H \in G$, $H \in A$, $H \notin F$.

II.2 Multiples et diviseurs

Définition

Soient a et b deux entiers relatifs, b non nul.
S'il existe un entier relatif a tel que $a = bq$, alors a est un **multiple** de b et b est un **diviseur** de a.

Remarque : si $a = bq$, on dit aussi que b divise a ou que a est divisible par b.
Si on effectue la division euclidienne de a par b, le reste est nul.

Exemples :

- $21 = 3 \times 7$ donc 21 est un **multiple** de 3 ou 3 divise 21, donc 3 est un **diviseur** de 21.
- 1 347 est divisible par 3 car si l'on effectue la division euclidienne, le reste est nul :

$$\begin{array}{r|l}
1\,3\,4\,7 & 3 \\ \cline{2-2}
1\,4 & 4\,4\,9 \\
2\,7 & \\
0 &
\end{array}$$

Définition

- Un nombre a entier est pair si c'est un multiple de 2, donc s'il existe q tel que $a = 2q$.
- Un nombre a entier est impair si ce n'est un multiple de 2, donc s'il existe q tel que $a = 2q + 1$.

Exemples :

- 3 est impair car $3 = 2 \times 1 + 1$
- 8 est pair car $8 = 2 \times 4$.

II.3 Nombres premiers

Définition

Un nombre a entier positif est premier s'il a exactement deux diviseurs positifs, 1 et lui-même (diviseurs propres).
Le plus petit nombre premier est donc 2 et c'est le seul à être pair.
Il y a un nombre infini de nombres premiers : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13....

Remarque : on ne connaît pas tous les nombres premiers et étant donné un très grand nombre, il est difficile de savoir si celui-ci est premier, même avec de puissants ordinateurs ; une grande partie des codes secrets est basée sur cette difficulté à savoir si un nombre est premier ou pas.
Remarque : le plus grand nombre premier connu est $2^{82\,589\,933} - 1$, qui comporte près de 25 millions de chiffres en écriture décimale. On doit cette performance (la vérification est en cours) au Gimps, le Great Internet Mersenne Prime Search. (7 décembre 2018) (voir ici) ou sur Wikipedia : (ici).
On peut aussi consulter la page de M. Villemin ici

Exemple : 33 est premier car il n'est divisible que par 1 et 33.

III Nombres décimaux

Définition

Un nombre x est décimal s'il peut d'écrire comme le quotient d'un nombre entier par une puissance de 10 ; $x = \dfrac{a}{10^k}$.
Son écriture décimale contient alors un nombre **fini** de chiffres.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.
Un nombre est décimal si son écriture décimale **peut** s'écrire avec un nombre fini de chiffres.

Exemples :

- $7,121 = \dfrac{121}{1\,000} = \dfrac{121}{10^3}$ donc 7,121 est un nombre décimal.
- $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.
  Justification : si $\dfrac{1}{3}$ était décimal, il existait k tel que $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^k}$ donc $3a = 10^k$ ce qui est impossible car 3 ne divise jamais 10^k.
  Autre justification : $\dfrac{1}{3} = 0,3333\cdots$ avec une infinité de 3 après la virgule, donc $\dfrac{1}{3}$ n'est pas décimal.

⚠ : Ce n'est pas parce que l'écriture d'un nombre contient une infinité de décimales que celui-ci n'est pas décimal.
Exemple : le nombre $0{,}999\,999\cdots$ est égal à 1, car $0{,}333\,333\cdots = \dfrac{1}{3}$ donc $0{,}999\,999\cdots = 3 \times \dfrac{1}{3} = 1$

IV Nombres rationnels

Définition

a est un nombre rationnel s'il peut d'écrire sous la forme $\dfrac{p}{q}$ où p et q sont des entiers relatifs, q non nul.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Exemples :

- $\dfrac{2}{3}$ est rationnel
- $2,33 = \dfrac{233}{100}$ donc 2,33. est rationnel.
- $\sqrt{2}$ ou π ne sont pas des nombres rationnels.

Propriété (admise)

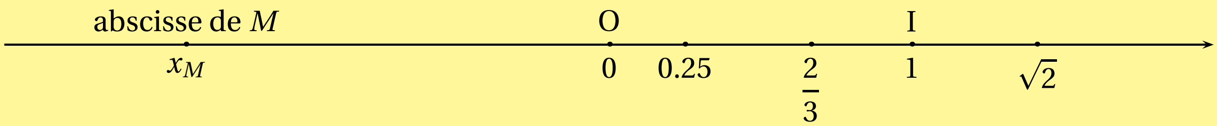
Tout nombre rationnel r a une forme irréductible **unique**, c'est-à-dire qu'il existe un unique entier relatif a et un unique entier naturel b tel que $r = \dfrac{a}{b}$ et tels que le seul diviseur commun à a et b soit 1 (on dit que a et b sont premiers entre eux).

V Nombres réels

Nous avons vu qu'il existait des nombres qui n'étaient pas rationnels.
Historiquement, cela a posé une crise chez les grecs, avec le nombre $\sqrt{2}$; d'après le théorème de Pythagore, la diagonale d'un carré de côté 1 vaut $\sqrt{2}$; pour les grecs, tout dans la nature est mesurable, mais les gros ne conçoivent que les nombres entiers et les nombres rationnels. Or, ils ont montré que $\sqrt{2}$ n'était pas rationnel, donc ont trouvé une longueur non mesurable avec les nombres qu'ils connaissaient…
Remarque : ils n'ont pas su régler le problème ! **Anecdote** : Hippase de Métaponte, aurait été noyé en mer pour avoir divulgué l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.

Définition

On considère une droite, munie d'un repère $(O\ ;\ I)$.



L'ensemble des nombres réels est l'ensemble des abscisses des points de cette droite, appelée droite numérique (ou droite des réels).
À chaque point correspond un nombre unique (son abscisse) et à chaque nombre correspond un point unique.
L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

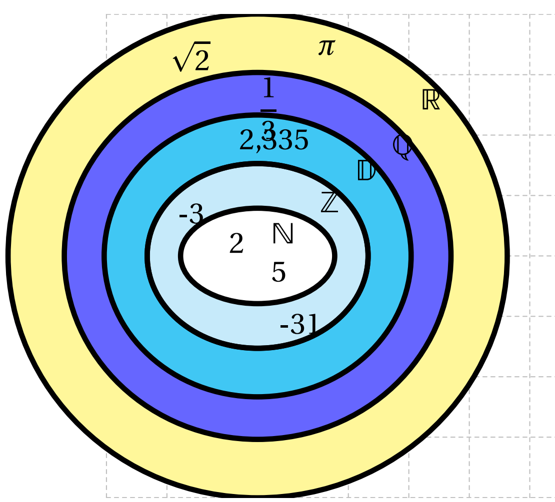
Exemples :

- Tous les nombres que vous connaissez sont des nombres réels.
- π, $\sqrt{2}$ sont des nombres réels, mais ils ne sont pas rationnels

Résumé sur les différents ensembles de nombres :
Nous avons les inclusions (strictes) suivantes :

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

Schématiquement :



VI Intervalles de $\mathbb{R}$

VI.1 Symboles d'inégalités

Rappel :

$<$ signifie « est strictement inférieur à »

$>$ signifie « est strictement supérieur à »

$\leqslant$ signifie « est inférieur **ou égal** à »

$\geqslant$ signifie « est supérieur **ou égal** à »

Exemples :

- $2 < 7$ est vrai
- $7 < 7$ est faux
- $2 \leqslant 7$ est vrai
- $7 \leqslant 7$ est vrai
- $5 \geqslant 5$ est vrai car $5 = 5$
- $7 > 2$ est vrai

VI.2 Intervalles fermés

Définition

Soient a et b deux réels.
L'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ est un intervalle, noté $[a\,;\,b]$. a et b sont les bornes de cet intervalle.

On le représente en rouge sur la droite réelle de la façon suivante :

Cet ensemble est un intervalle de $\mathbb{R}$. a et b sont ses bornes. Cet intervalle contient ses bornes. On dit qu'il est fermé.

VI.3 Intervalles semi-ouverts

Définition

Soient a et b deux réels.
L'ensemble des réels x tels que $a < x \leq b$ est un intervalle, noté $]a\,;\,b]$. a et b sont les bornes.

L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$ est un intervalle, noté $[a\,;\,b[$. a et b sont les bornes.

VI.4 Intervalles ouverts

Définition

Soient a et b deux réels.
L'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ est un intervalle, noté $]a\,;\ b[$. a et b sont les bornes.

VII Intervalles infinis

VII.1 Intervalle illimité à droite

Définition

L'ensemble des réels x tels que $a < x$ est un intervalle, noté $]a\,;\ +\infty[$.
L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x$ est un intervalle, noté $[a\,;\ +\infty[$.

Remarque : Le symbole ∞ , qui se lit « infini » a été inventé par le mathématicien John Wallis (1616-1703). **Ce n'est pas un nombre réel**.

VII.2 Intervalles illimités à droite

Définition

L'ensemble des réels x tels que $a < x$ est un intervalle, noté $]a\,;\ +\infty[$.
L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x$ est un intervalle, noté $[a\,;\ +\infty[$.

Définition

L'ensemble des réels x tels que $x < a$ est un intervalle, noté $]-\infty\ ;\ a[$.
L'ensemble des réels x tels que $x \leqslant a$ est un intervalle, noté $[-\infty\ ;\ +a]$.

Remarques :

- Le crochet est fermé, tourné vers l'intérieur, si l'on garde le nombre et ouvert, vers l'extérieur, si l'on rejette le nombre.
- ∞ n'est pas un nombre réel, donc le crochet du côté de l'infini est **toujours** tourné vers l'extérieur.

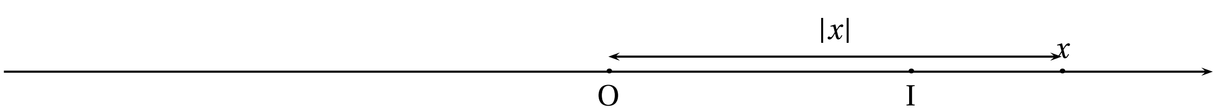
VIII Valeur absolue d'un nombre

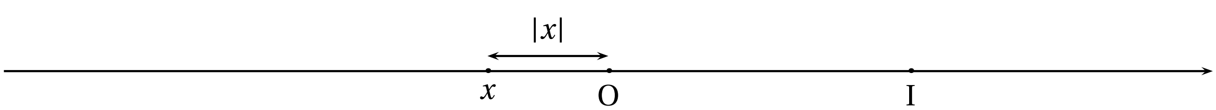
Définition

Soit x un nombre réel. On appelle valeur absolue de x, le nombre noté $|x|$, défi par $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Exemples : $|3| = 3$; $|-7| = -(-7) = 7$; $|0| = 0$

Interprétation graphique : sur la droite graduée (droite des réels), $|x|$ est la distance de x à 0.

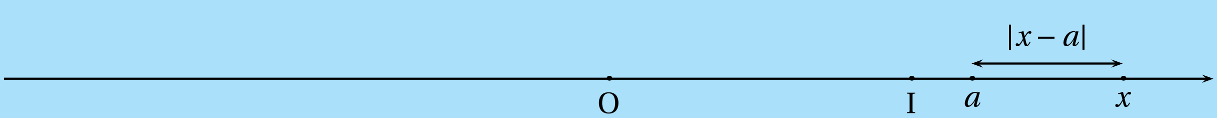




En effet, une distance est toujours un nombre positif.

Définition et propriété

- Soit a, x et r des nombres avec $r \geqslant 0$.
  On appelle distance entre a et x le nombre $|a - x|$.
  Remarque : $|a - x| = |x - a|$.



- $x \in [a - r\ ;\ a + r]$ si, et seulement si, $|x - a| \leqslant r$.


r
r
O
I
a − r
a
a + r