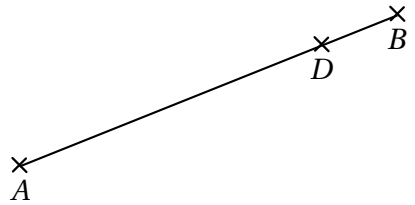
Correction du TD nº 4

I

$\overrightarrow{DA}+4\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{0}$ s'écrit $\overrightarrow{DA}+4\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{DA}+4\overrightarrow{DA}+4\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$ qui donne $5\overrightarrow{DA}+4\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$
D'où $4\overrightarrow{AB}=-5\overrightarrow{DA}=5\overrightarrow{AD}$.
En multipliant par $\frac{1}{5}$, on a : $\frac{4}{5}\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AD}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}}$.



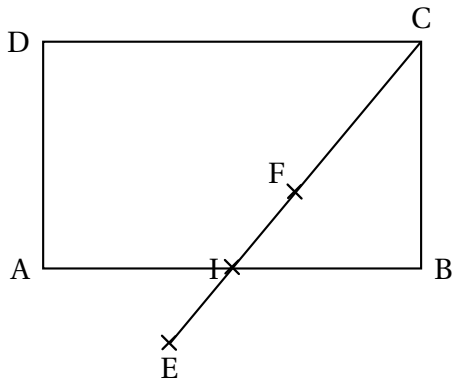
II

1. $4\overrightarrow{AD}-4\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{0}$ s'écrit
   $4\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}\right)+2\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{0}$ donc
   $4\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)+2\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{0}$.
   D'où; $4\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{CD}$ et en divisant par 4 et en simplifiant : $\boxed{\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}}$.
   On a $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ avec $k=-\frac{1}{2}$.
   Remarque : les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction donc les droite (AB) et (CD) sont parallèles.
2. $\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{0}$ s'écrit
   $\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{0}$ donc
   $2\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$ qui donne
   $2\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)+DC=0$.
   Alors on trouve $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$ qui donne
   $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.
   Donc $\boxed{\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}}$.
3. $5\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CB}=7\overrightarrow{AD}-4\overrightarrow{AC}$ équivaut à
   $5\overrightarrow{AB}-3\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=7\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)-4\overrightarrow{AC}$
   équivaut à $5\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AB}=7\overrightarrow{AC}+7\overrightarrow{CD}-4\overrightarrow{AC}$
   équivaut à $5\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=7\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AC}+7\overrightarrow{CD}$
   équivaut à $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AC}+7\overrightarrow{CD}$ d'où
   $2\overrightarrow{AB}=7\overrightarrow{CD}$ qui donne $\boxed{\overrightarrow{AB}=\frac{7}{2}\overrightarrow{CD}}$

III

$ABCD$ est un rectangle; I est le milieu de $[AB]$.
E tel que $\overrightarrow{IE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ et F est le symétrique de E par rapport à I

1. Figure :

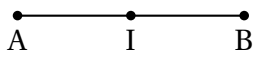


2. Voir figure pour F.
   Par construction, $\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{IE}$ donc $\boxed{\overrightarrow{FI}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}}$.
3. $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FI}+\overrightarrow{IB}$ (relation de Chasles)
   $=-\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
   $=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
   $=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$
   car $-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{-1+3}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.
   Par conséquent : $\boxed{\overrightarrow{FB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}}$
4. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ (car ABCD est un rectangle) donc $\overrightarrow{FB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

5. On obtient alors :
$\overrightarrow{FB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)$
$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.
Conclusion : $\boxed{\overrightarrow{FB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}}$.
6. Les droites (FB) et (DB) ont donc la même direction et sont alors parallèles ; comme elles ont un point commun, elles sont **confondues** donc les points D, F et B sont **alignés**.

IV

1. (a) I est le milieu d'un segment $[AB]$.



On a : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$

(b) M est un point quelconque :
$\left(\overrightarrow{MA} + M\overrightarrow{MB}\right) = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)$
$= 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI}$ puisque, d'après a), $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.
Donc, en divisant par 2 :

$$\boxed{\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)}.$$

2. (a) D'après la question 1 ; (b), pour tout point M, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC'}$, donc en appliquant cette propriété avec G, on trouve :
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GC'}$.
Or $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ donc

$$\boxed{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GC}}.$$

On en déduit $--\overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GC'}$; les deux vecteurs $\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{GC'}$ ont donc la même direction. Les droites (GC) et (GC') sont parallèles avec G comme point commun. On en déduit que ces deux droites sont confondues. G appartient donc à la droite $\left(CC'\right)$.

(b) Avec le même raisonnement, on montre que G appartient aux droites $\left(BB'\right)$ et $\left(AA'\right)$.

(c) Les trois droites $\left(AA'\right)$, $\left(BB'\right)$ et $\left(CC'\right)$ sont les trois **médianes** du triangle ABC.
G est donc le **centre de gravité** du triangle ABC

Conclusion : le centre de gravité G du triangle (point d'équilibre) est le point G vérifiant :

$$\boxed{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}}.$$

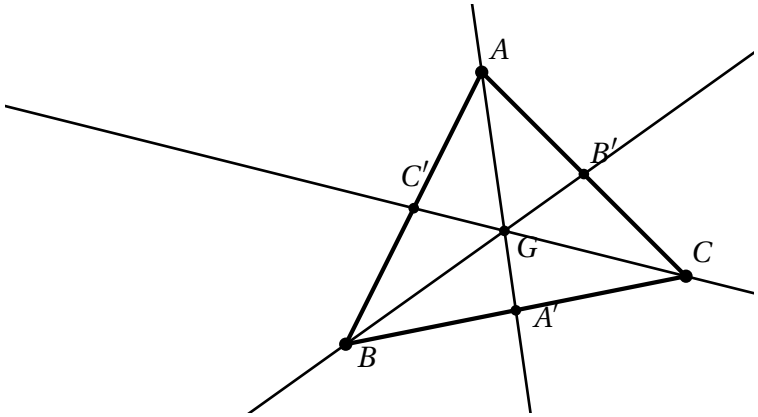



Figure :