Vecteurs et translations (première partie)

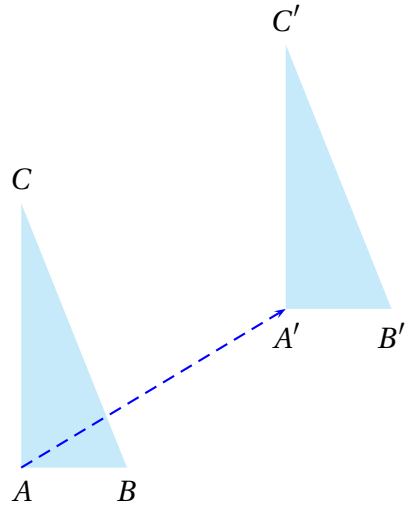
Table des matières

I Translations 1
II Vecteur d'une translation 2
III Egalité de vecteurs 3
IV Somme de deux vecteurs 4
V Multiplication d'un vecteur par un réel 5

Activité 1 page 196

I Translations

On considère un triangle ABC. On le déplace en le faisant glisser de façon à ce qu'il garde la même orientation par rapport à la feuille de papier ou au tableau. Le sommet A vient en A', B vient en B' et C vient en C'.



On dit qu'on a effectué une **translation** du triangle.
Faire subir une **translation** à un objet revient à le faire glisser en **gardant la même orientation**.

II Vecteur d'une translation

Remarque : Dire qu'on a fait glisser la figure ou qu'on lui a fait subir une translation est **insuffisant**. On ne sait pas où la figure arrive !
Il faut préciser davantage.

Définition

En fait, puisque la figure reste inchangée et qu'elle garde la même orientation, il suffit de donner le déplacement d'un **seul** point de la figure.
Par exemple, il suffit de dire que A va en A' pour pouvoir construire le triangle $A'B'C'$.
On dit que l'on a effectué une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$

Remarque : on aurait pu dire que B allait en en B' ou C en C'. La figure a donc aussi subi une translation de vecteur $\overrightarrow{BB'}$ ou $\overrightarrow{CC'}$.

Représentation : Si $A \neq A'$, le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ se représente par une flèche d'origine A et d'extrémité A'.

Vocabulaire

Deux droites ont la même **direction** lorsqu'elles sont parallèles.
Deux voitures qui roulent sur une même route rectiligne vont dans la même direction ; elles peuvent aller dans le même **sens** ou dans des **sens** contraires. Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par sa **direction**, son **sens** et sa **longueur** AB.

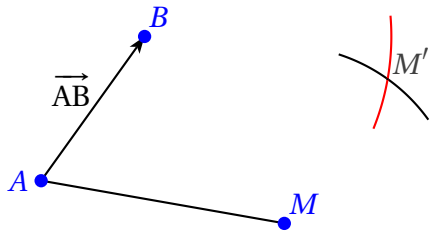
Définition

L'image d'un point M par une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un point M' tel que :

- les droites (AA') et (MM') ont la même **direction** (c'est à dire sont parallèles) ;
- les demi droites [AA') et [MM') ont le même **sens** ;
- les segments [AA'] et [MM'] ont la même longueur ; AA' = MM'

L'image M' d'un point M par une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ se construit au compas. En effet, $ABM'M$ est alors un parallélogramme, donc $AB = MM'$ et $AM = BM'$.

On trace l'arc de cercle de centre B et de rayon AC (car nous devons avoir $AC = BD$).
On trace l'arc de cercle de centre C et de rayon AB (car nous devons avoir $CD = AB$).



III Egalité de vecteurs

Deux vecteurs sont égaux s'ils correspondent à la même translation.
D'après ce qu'on a vu auparavant, on en déduit la définition suivante ;

Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si :

- les droites (AB) et (CD) sont parallèles ;
- les demi-droites [AB) et [CD) ont le même sens :
- les longueurs AB et CD sont égales.

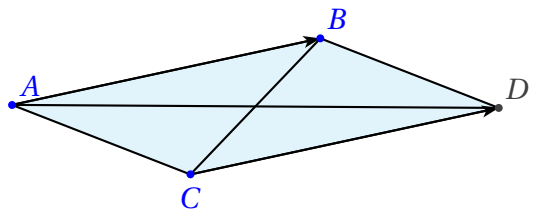
On écrit alors : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Soient deux vecteurs **égaux** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. D'après ce qu'on a vu, les segments [AB] et [CD] sont alors parallèles et de même longueur : on en déduit que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Remarque : sur la figure du I, on a : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

Propriété

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, ABDC et un parallélogramme (éventuellement aplati).
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, [AD] et [BC] ont le même milieu.



Remarque : si l'on ne veut pas préciser les extrémités du vecteur, on lui donne un nom avec une seule lettre, par exemple le vecteur $\vec{u}$.

Propriétés

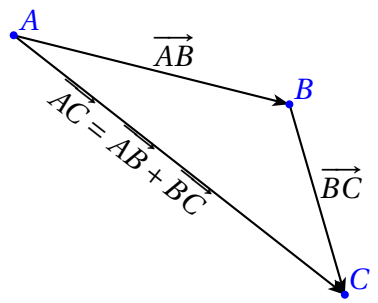
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ si, et seulement si B = C.
- K est le milieu du segment [AB] si, et seulement si, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$

Exercice : Soient ABCD et ABEF deux parallélogrammes.

1. Faire une figure.
2. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et DC ? Y a-t-il un autre vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$?
3. Conclure.

IV Somme de deux vecteurs

Le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Le point C est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. On applique **successivement** les deux translations. Cela revient à n'en appliquer qu'une seule (on va directement de A en C, sans passer par B). Cette translation qui permet de passer de A en C est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Ainsi définit-on une définition sur les vecteurs.



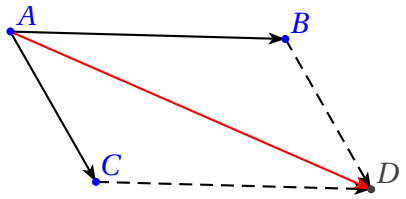
Propriété (relation de Chasles)

Pour tous points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Michel Chasles, né le 15 novembre 1793 à Épernon en Eure-et-Loir et mort le 18 décembre 1880 à Paris, est un mathématicien français, spécialisé en géométrie, notamment projective.
Pour plus de précisions cliquer ici

Remarque : Le segment d'extrémités A et C est la diagonale du parallélogramme dont $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont deux côtés consécutifs.

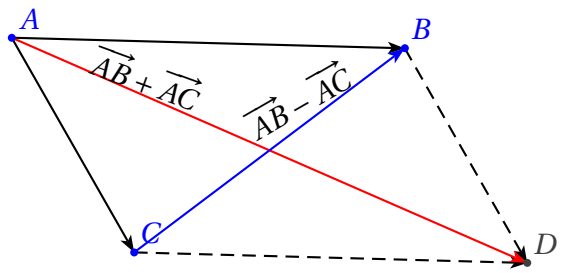
Somme de deux vecteurs de même origine : On veut construire la somme de deux vecteurs de même origine $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



On introduit le point D tel que ABDC soit un parallélogramme ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$). Ce point se construit au compas, puisque l'on doit avoir AB = CD et AC = BD. Alors : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ (**relation de Chasles**).

Remarque : En appliquant la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$. Une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie d'une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond à une translation de vecteur $\overrightarrow{AA}$, qui laisse tous les points immobiles ; on parle alors de translation de **vecteur nul**, noté $\overrightarrow{0}$. Par conséquent : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \cdots = \overrightarrow{0}$.
Comme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$, par analogie avec l'addition sur les nombres, on pose $\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BA}}$.

Exemple : Soit ABDC un parallélogramme. On a vu précédemment que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. On voudrait représenter également $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. On a : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \boxed{\overrightarrow{CB}}$ en appliquant la relation de Chasles. On remarque que l'on obtient l'autre diagonale du parallélogramme.



V Multiplication d'un vecteur par un réel

Notation

Soit k un réel. On note $|k|$ (« se lit valeur absolue de k »), le nombre défini par :

- $|k| = k$ si $k > 0$
- $|k| = -k$ si $k < 0$

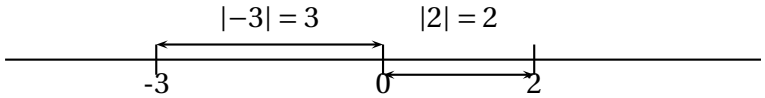
.

$|k|$ est donc toujours un nombre positif et représente la distance de k à l'origine sur une droite graduée.

Exemples :

$|2| = 2$ car 2>0

$|-3| = -(-3) = 3$ car $-3 < 0$



Notation

La « longueur » d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ se note $||\overrightarrow{u}||$.

Remarque : $||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

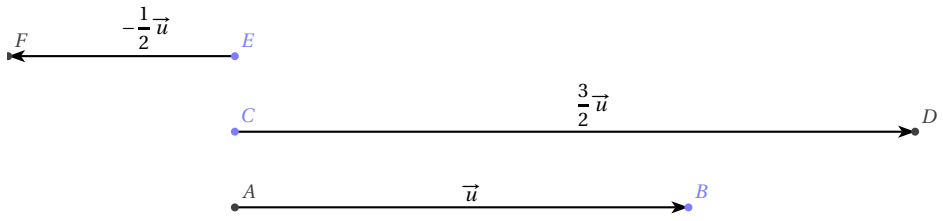
Propriété

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et soir k un réel non nul.

- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $k\overrightarrow{u}$ ont la même direction.
- Si $k > 0$, $k\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}$ ont le même sens. Si $k < 0$, les deux vecteurs sont de sens contraire.
- La norme de $k\overrightarrow{u}$ est $|k|$ fois celle de $\overrightarrow{u}$.
  $||k\overrightarrow{u}|| = |k| \times ||\overrightarrow{u}||$.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et pour tout réel k : $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $k\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Exemple :



Propriété

Pour tous réels k et k', pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- $k\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
- $k\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
- $k\vec{u} = \vec{0}$ si, et seulement si, $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.