Équations

Table des matières

I Définition d'une équation 1
II Méthode générale de résolution 1
III Équations du type $\mathbf{x^2 = a}$ 2
IV Équation sous forme d'un quotient 2

I Définition d'une équation

Définition

Une équation est une égalité dans laquelle figurent un ou plusieurs nombres inconnus.
Résoudre cette équation consiste à trouver **toutes** les valeurs que peuvent prendre ce ou ces nombres inconnus pour que l'égalité soit vraie.

Exemples :

- 2x+3=0 a pour solution le nombre $-\dfrac{3}{2}$
- L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 = -1$ est impossible dans $\mathbb{R}$.

II Méthode générale de résolution

1. Propriété : on ne change pas une égalité en additionnant le même nombre aux deux membres d el'égalité ou en multipliant ou en divisant les deux membres par un nombre non nul. (principe d'une balance à plateaux)
2. Équations du premier degré (équations fondamentales) :
   - $x + a = b$ équiavaut à $x + a - = b -$ dnc $\boxed{x = b - a}$
   - $x - a = b$ équiavaut à $x - a + = b +$ dnc $\boxed{x = b + a}$
   - $ax = b$ (avec $a \neq 0$) équivaut à $\dfrac{ax}{a} = \dfrac{b}{a}$ donc $\boxed{x = \dfrac{b}{a}}$
   - $\dfrac{x}{a} = b$ équivaut à $\dfrac{x}{a} \times = b \times$ donc $\boxed{x = ba}$
3. **Théorème fondamental (théorème du produit nul)** :

Théorème

Dans $\mathbb{R}$, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

Méthode :

- Sauf cas particulier, on transpose tout du même côté pour se ramener à une équation du type $A(x) = 0$.
- On essaye de factoriser pour utiliser le théorème du produit nul.
  Pour cela, on essaye de repérer un facteur commun, sinon, une identité remarquable. S'il n'y a pas de factorisation possible, on développe.

Exemples :

(a) Résoudre l'équation $(3x+1)(x+4) = 3x+1$.
Cette équation est équivalente à $(3x+1)(x+4) - (3x+1) = 0$, soit $(3x+1)[(x+4)-1] = 0$ donc $(3x+1)(x+3) = 0$.
$3x+1 = 0$ donne $x = -\dfrac{1}{3}$, $x+3 = 0$ donne $x = -3$.
L'équation a deux solutions : $\mathscr{S} = \left\{-3\,;\,-\dfrac{1}{3}\right\}$

(b) Résoudre l'équation : $(2x+5)^2 = (3x-2)^2$.
On obtient : $(2x+5)^2 - (3x-2)^2 = 0$, soit : $[(2x+5)+(3x-2)]\,[(2x+5)-(3x-2)] = 0$ qui s'écrit :
$(5x+3)(-x+7) = 0$.
Les solutions sont alors : $\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{3}{5}\,;\,7\right\}$.

III Équations du type $x^2 = a$

- Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution, car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$, donc x^2 ne peut pas être égal à un nombre strictement négatif.
- $x^2 = 0$ a pour solution $x = 0$
- Soit $a > 0$; l'équation s'écrit $x^2 - a = 0$, c'est-à-dire $x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = 0$ qui se factorise en $\left(x+\sqrt{a}\right)\left(x-\sqrt{a}\right) = 0$.
  L'équation a donc deux solutions : $\mathscr{S} = \{-\sqrt{a}\,;\,\sqrt{a}\}$.

IV Équation sous forme d'un quotient

Propriété

L'équation $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$ équivaut à $B(x) \neq 0$ et $A(x) = 0$

On commence par chercher les valeurs « interdites » qui annulent le dénominateur. L'ensemble de définition (valeurs réelles pour lesquelles l'expression globale est définie) est alors $\mathbb{R}$, privé de ces valeurs interdites.

Exemples :

(a) Résoudre l'équation $\dfrac{2x+3}{x-1} = 0$.
Condition d'existence : $x - 1 \neq 0$ donc $x \neq 1$.
Pour $x \neq 1$, l'équation s'écrit : $2x+3 = 0$ qui donne $x = -\dfrac{3}{2}$.
$-\dfrac{3}{2} \neq 1$ donc $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}}$.

(b) Résoudre $\dfrac{x^2-1}{x+1} = 0$.
On commence par résoudre l'équation $x+1 = 0$ qui a pour solution $x = -1$.
L'ensemble de définition est donc $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
On suppose maintenant $x \neq -1$.
L'équation s'écrit alors : $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 0$ qui a pour solutions -1 et 1.
Or, $x \neq -1$.
L'ensemble des solutions de l'équation est donc : $\boxed{\mathscr{S} = \{1\}}$.