Signe d'un produit ou d'un quotient de fonctions affines

I Signe d'un produit de fonctions affines

On appelle binôme une expression du type $ax+b$ (ou polynôme du premier degré).

Propriété fondamentale

- Le produit de deux nombres de même signe est positif.
- Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif

Méthode :

Pour étudier le signe d'une produit de fonctions affines :

- on étudie le signe de chacune d'entre elles,
- on récapitule tout cela dans un tableau de signes (une ligne par fonction affine)
- puis dans la dernière ligne, on trouve le signe du produit en appliquant la règle sur le signe d'un produit.

Exemple : étudions le signe de $A(x) = (2x-3)(x+6)$

- Cherchons les valeurs de x qui annulent chacune des deux fonctions affines constituant $A(x)$:
- $2x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$
- $2x-3>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{3}{2}$
- $x+6=0 \Leftrightarrow x=-6$
- $x+6>0 \Leftrightarrow x>-6$
- Dressons maintenant le tableau des signes de $A(x)$:

x	$-\infty$		-6		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- **Conclusion** :

  $A(x)>0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\,;\,-6\right[\cup \left]\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$

  $A(x)<0 \Leftrightarrow x \in \left]-6\,;\,\dfrac{3}{2}\right[$.

  $A(x)=0$ pour $x=-6$ ou $x=\dfrac{3}{2}$.

II Signe d'une expression rationnelle factorisée

Définition

Une expression rationnelle factorisée est une expression littérale de la forme :

$$\frac{(a_1 x+b_1)(a_2 x+b_2)(a_3 x+b_3)\cdots(a_n x+b_n)}{(a'_1 x+b'_1)(a'_2 x+b'_2)(a'_3 x+b'_3)\cdots(a'_n x+b'_n)}$$

⚠**Attention** : dans ce genre d'expressions, il faut tenir compte des **valeurs interdites**.
Il faut donc commencer par chercher ces valeurs interdites !
On renseigne alors un tableau de signes comme pour un produit.

Exemple :

Étudions le signe de $B(x)=\dfrac{2x(3x-6)}{(x-3)(1-x)}$

- Cherchons les valeurs de x qui annulent chacun des binômes de $B(x)$: $2x=0 \Leftrightarrow x=0$

  $3x-6=0 \Leftrightarrow x=2$ et $3x-6>0 \Leftrightarrow x>2$

  $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ et $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$

  $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$ et $1-x>0 \Leftrightarrow x<1$

  1 et 3 sont donc des valeurs interdites.

- Dressons maintenant le tableau des signes de $B(x)$:

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$	
$3x-6$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$x-3$		$-$		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$+$	
$1-x$		$+$		$+$	‖	$-$		$-$	‖	$-$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

- **Conclusion :**

  $B(x)>0 \Leftrightarrow x\in]0\,;\,1[\cup]2\,;\,3[$
  $B(x)<0 \Leftrightarrow x\in]-\infty\,;\,0[\cup]1\,;\,2[\cup]3\,;\,+\infty[$
  $B(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{0\,;\,2\}$

Remarque : dans le cas général, on procède de la même façon; on factorise le numérateur et le dénominateur et on étudie le signe de chaque facteur. On consigne alors le tout dans un tableau de signes.

III Principe de résolution d'un inéquation

On transpose du même côté pour se ramener à une comparaison à 0 et on applique le principe vu dans le paragraphe précédent.

Exemple : résoudre l'inéquation $\dfrac{2x-3}{x-5}\leqslant 4$.

- **Ensemble de définition** : on doit avoir $x\neq 5$; l'ensemble de définition est donc $\mathscr{D}=]-\infty\,;\,5[\cup]5\,;\,+\infty[$.
- Pour $x\in\mathscr{D}$, $\dfrac{2x-3}{x-5}\leqslant 4 \Leftrightarrow \dfrac{2x-3}{x-5}-4\leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-3-4(x-5)}{x-5}\leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-3-4x+20}{x-5}\leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x+17}{x-5}\leqslant 0.$

- **Étude du signe du numérateur** :
  $-2x+17=0 \Leftrightarrow -2x=-17 \Leftrightarrow x=\dfrac{-17}{-2}=\dfrac{17}{2}$.
  $-2x+17<0 \Leftrightarrow x>\dfrac{17}{2}$ car $x \mapsto -2x+17$ est une fonction affine de coefficient directeur -2, négatif, donc c'est une fonction affine décroisante. Elle prend d'abord des valeurs positives puis négatives.
  On en déduit $2x-17>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{17}{2}$.
- **Étude du signe du dénominateur $\mathbf{x-5}$**.
  On sait que $x-5=0$ pour $x=5$.
  $x-5<0 \Leftrightarrow x<5$ (pa exemple en addition int 5 de chaque côté ou en trouvant le signe de la fonction affine)
- **Tableau de signes :**

x	$-\infty$		5		$\frac{17}{2}$		$+\infty$
$-2x+17$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-5$		$-$	||	$+$	|	$+$	
$(-2x+17)(x-5)$		$-$	||	$+$	0	$-$	

5 est une valeur interdite, donc on met une double barre dans le tableau en dessous de 5.
Le quotient doit être inférieur ou égal à 0.
On regarde alors sur la première ligne les valeurs pour lesquelles le quotient est inférieur ou égal à 0 (dernière ligne).

L'ensemble des solutions est : $\boxed{\mathscr{S}=\left]-\infty\,;\,5\right[\cup\left[\dfrac{17}{2}\,;\,+\infty\right[}$