Informations chiffrées

I Proportion et pourcentage

I.1 Population et sous-population

Définition

On appelle population un ensemble d'éléments appelés individus.
On appelle sous-population une partie de la population

Exemple : la classe de 2nde 7 constitue une population ; les élèves sont des individus ; l'ensemble des garçons est une sous-population,de même que l'ensemble des filles.

I.2 Proportion d'une sous-population

Définition

On considère une population de N individus et une sous-population de n individus.
La proportion d'individus de la sous-population, notée p, est $p = \frac{n}{N}$.

Remarque : cette proportion peut s'exprimer en pourcentage.
On rappelle que $x\,\% = \frac{x}{100}$.
Exemple, dans une classe de 35 élèves, il y a 18 garçons.
La proportion de garçons est $p = \frac{18}{35} \approx 0,514 = \frac{51,4}{100} = 51,4\,\%$.

I.3 Pourcentage de pourcentage

Propriété

On considère une population notée A, une sous-population B de A et une sous-population C de B.
On note p_B la poporyion d'individus de la population B dans A et p_C celle de C dans B.
La proportion p d'individis de C dans A est $\boxed{p = p_B \times p_C}$

Exemple : dans un lycée, il y a 345 élèves de seconde ; la seconde 1 contient 35 élèves, donc 18 garçons.
La proportion d'élèves de seconde 1 parmi la population des élèves de seconde est $p_1 = \frac{35}{345}$.
La proportion de garçons de seconde 1 parmi les élèves de seconde 1 est $p_2 = \frac{18}{35}$.
On en déduit que la propotion d'élèves de garçons de seconde 1 parmi les élèves de seconde est
$p = p_1 \times p_2 = \frac{35}{345} \times \frac{18}{35} = \frac{18}{345}\frac{6}{145} \approx 0,0521 = \frac{5,21}{100}$ soit $5,21\,\%$.

II Variation absolue variation relative

Définition

On considère une valeur qui varie au cours du temps. on note V_i la valeur initiale et V_f la valeur finale.
La **variation absolue** de la quantité est la différence $\boxed{V_f - V_i}$.

Exemple : un prix est passé au cours de l'été de 1,40 € à 1,50 €.
La variation absolue de ce prix est $1,50 - 1,40 = 0,1$.

II.1 Variation relative

Définition

Une quantité passe la valeur initiale V_i à la valeur finale V_f. La variation relative de cette quantité est $\dfrac{V_f - V_i}{V - i}$.
Cette variation relative s'appelle aussi **taux d'évolution** (nombre sans unité)

On pose $t = \dfrac{V_f - Vi}{V_i}$ (tux d'évolution).
On a alors $tV_i = V_f - V_i$ donc $V_i + tV_i = V_f$ soit $V_f = V_i + tV_i = (1+t)V_i$.

Définition et propriété

Le nombre $C = 1 + t$ s'appelle le **coefficient multiplicateur**.
Si t est négatif, $C < 1$ et la quantité diminue.
Si t est positif, $C > 1$ et la quantité augmente.

Exemples :

1. Un prix augmente de $t = 3$ % ; le coefficient pultiplicateur est $C = 1 + \dfrac{3}{100} = 1,03$.
   Le prix est multiplié par 1,03.
2. Dans un pays qui subit une forte inflation, les prix ont été multipliés par 4 en un mois.
   On a donc $C = 4$; or $C = 1 + t$ donc $t = C - 1 = 3 = \dfrac{300}{100} = 300$ %.
   Le taux d'inflation a été de 300 % durant ce mois.

III Taux d'évolutions successives

III.1 Taux d'évolution global

Exemple : En 2005, un objet avait un prix de 120 €. Son prix a augmenté en un an de 3 %. L'année suivante, son prix augmenté de 2 %.
Quel est alors son prix ?
Le premier coefficient multiplicateur est $C_1 = 1 + 3\,\% = 1 + \dfrac{3}{100} = 1,03$.

En 2006, son prix vaut : $120 \times C_1 = \times \left(1 + \dfrac{3}{100}\right) = 120 \times 1,03 = 123,6$ €.

Le deuxième coefficient directeur est $C_2 = 1 + 2\,\% = 1 + \dfrac{2}{100} = 1,02$.

En 2007, son prix vaut : $123,60 \times C_2 = 120 \times 1,03 \times \left(1 + \dfrac{2}{100}\right) = 120 \times 1,03 \times 1,02 = 126,072 \approx \boxed{126,7\text{ €}}$.

Cela revient à calculer $120 \times C$ en posant $\boxed{C = C_1 \times C_2}$
On voit que cela revient à multiplier les coefficients multiplicateurs entre eux.

Cas général

Définition

Soient y_0, y_1, $\dots y_n$ des nombres réels strictement positifs.
t_1, t_2, $\dots t_n$ sont les taux d'évolution successifs permettant de passer de y_1 à y_2, de y_2 à y_3, ..., de y_{n-1} à y_n.

Le coefficient multiplicateur global T permettant de passer de y_0 à y_n est le **produit** des n coefficients.
$C = C_1 \times C_2 \times \cdots C_n$, autrement dit : $1 + T = (1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n)$ donc

$$\boxed{T = (1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n) - 1}$$

.

III.2 Taux d'évolution réciproque

Exemple

Un objet coûte 20 €. Son prix subit une hausse de 2 %.

1. Quel est son nouveau prix ?
2. Quel est le montant de la baisse qu'il doit subir pour retrouver sa valeur initiale ?

Réponses :

1. Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 2 % est $1 + 2\ \% = 1,02$.
   Le nouveau prix est : $20 \times 1,02 = 20,4$.
2. Soit t le taux de baisse ; le coefficient multiplicateur est alors : $1 + t$.
   On doit donc avoir : $(20 \times 1,02) \times (1+t) = 20$, d'où, après simplification par 20 :
   $1,02 \times (1+t) = 1$, et, par conséquent : $1 + t = \dfrac{1}{1,02}$.
   On en déduit : $\boxed{t = \dfrac{1}{1,02} - 1}$.
   Alors : $t \approx -0,01960$, soit environ $-1,96\ \%$.
   On dit que le taux d'évolution réciproque de 2 % est de $-1,96\ \%$.

Définition et propriété

Les coefficients multiplicateurs de deux évolutions réciproques sont inverses l'un de l'autre.
Soit t le taux d'évolution subi par un nombre. On appelle taux d'évolution réciproque le taux t' qu'il faut alors appliquer pour retrouver le nombre de départ.

$$\text{On a : } t' = \frac{1}{1+t} - 1$$

Démonstration :

Le coefficient multiplicateur est $C = 1 + t$.

Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est C' avec $C' = \dfrac{1}{C}$. Le coefficient multiplicateur associé est $1 + t'$.

On a $C' = 1 + t' = \dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{1+t}$ d'où : $\boxed{t' = \dfrac{1}{1+t} - 1}$.

t' est le **taux d'évolution réciproque** du taux t

Exemples :

1. Pour un taux $t = 3$ %, on obtient $t' = \dfrac{1}{1+0,03} - 1 \approx -0,029 \approx -2,9$ %.
   Le taux dévolution réciproque de 2 % est de -2,9 %.
2. Pour un taux $t = -10$ %, on obtient $t' = \dfrac{1}{1-0,1} - 1 \approx 0,111 \approx 11,1$ %.
   Le taux dévolution réciproque d'une baisse de 10 % est d'environ 11,1 %.