Équations de droites et systèmes d'équations

Table des matières

I Équation cartésienne d'une droite 1
I.1 Vecteur directeur d'une droite 1
I.2 Équation cartésienne d'une droite 2
II Équation réduite de droite 3
II.1 Droite parallèle à l'axe des ordonnées 3
II.2 Droite sécante à l'axe des ordonnées 3
III Systèmes d'équations linéaires à deux inconnues 4
III.1 Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues 4
III.2 Lien entre droites et systèmes 4

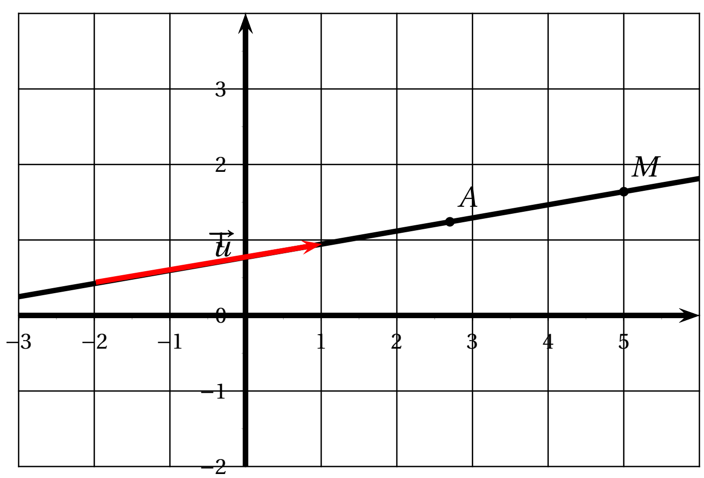
I Équation cartésienne d'une droite

Remarque : le mot cartésien vient du mathématicien et philosophe René Descartes (1596-1650).

I.1 Vecteur directeur d'une droite

Propriété

Doient $\overrightarrow{u}$ une vecteur et A un point.
L'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires est une droite passant par A.
Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est alors appelé vecteur directeur de cette droite.



Propriétés

Soient d une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Et une droite d' de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$.

- Tous les vecteurs directeurs de d sont les vecteurs non nuls colinéaires à $\overrightarrow{u}$.
- Les droites d et

I.2 Équation cartésienne d'une droite

Propriété et définition

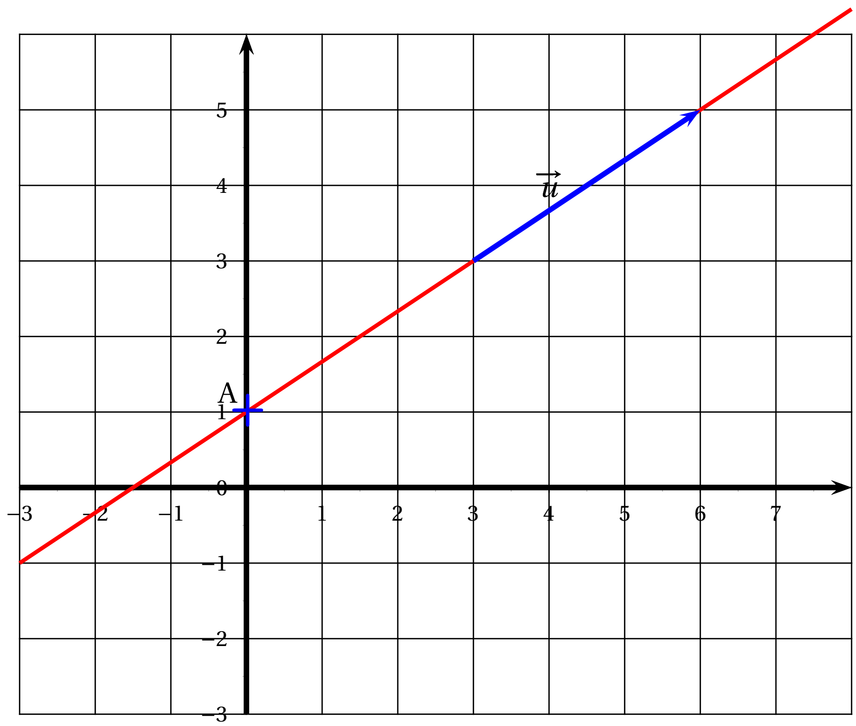
Soient a, b et c trois réels non tous nuls (l'un au moins est non nul).
L'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $ax+by+c=2$ est une droite, de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.
L'équation $ax+b+c=0$ est appelée **équation cartésienne** de la doigte d.

Remarque : une droite a une infinité d'équations cartésiennes, proportionnelles entre elles.

Exemple : soit l'équation cartésienne $2x-3y+3=0$ et d la droite correspondante.

- Il est « évident » que le point $A(0\ ;\ 1)$ a des coordonnées qui vérifient cette équation (il suffit de remplacer !)
- Un vecteur directeur de cette droite d est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

Cette droite est représentée ci-dessous.



Propriété

Soient a et b deux réels tels que l'un au moins des deux nombres a e b ne soit pas nul.
Toute droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Exemple : soit d une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$.

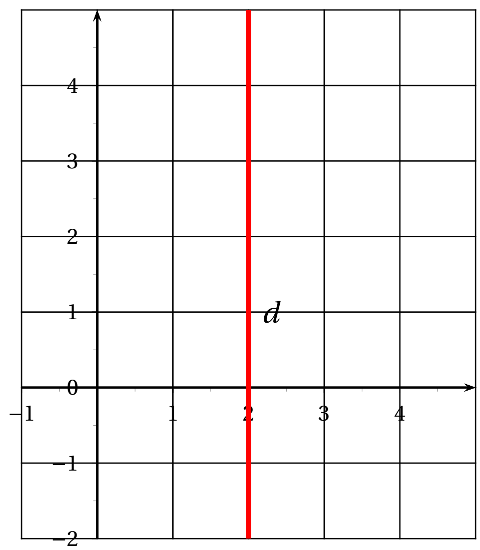
La droite d admet une séquation cartésienne de la forme $\boxed{7x-5y+c=0}$.
On détermine la valeur de c à partir des coordonnées d'un point connu de la droite.

II Équation réduite de droite

Nous avons vu que toute droite a une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ et réciproquement, si les trois nombres a, b et c ne sont pas simultanément nul.
Une équation écrite sous cette forme n'est pas très pratique à utiliser.
On va voir deux formes réduites.

II.1 Droite parallèle à l'axe des ordonnées

Soit d une droite parallèlèle à l'axe des ordonnées.
Une équation cartésienne de la droite d peut d'écrire sous la forme $x = k$, où $k \in \mathbb{R}$ (k erst donc une constante).

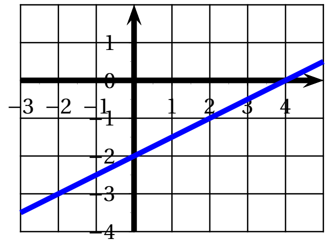


Remarque : Si d a pour équatiion $x = k$, $k \in \mathbb{R}$, tous les points de la droite d ont une abscisse égale à k.
Une telle droite n'est pas représentative d'une fonction, car si tel était le cas, une même abscisse aurait plusieurs images, ce qui est impossible pour une fonction.

II.2 Droite sécante à l'axe des ordonnées

Propriété et définition

Soit d une droite sécante à l'axe des ordonnées. L'équation cartésienne de la droite d peut s'écrire sous la forme $y = mx + p$, où m et p sont deux réels.
Cette équation est appelée équation réduite de d.
Cette droite est la représentation graphique d'une fonction affine.
m est le coefficient directeur et p est l'ordonnée à l'origine.



Remarques :

- L'ordonnée à l'origine p est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

- Soient $a\left(x_A\ ;\ y_A\right)$ et $B\left(x_B\ ;\ y_B\right)$ deux points de la droite d'équation $y = mx + p$
  Le coefficient directeur est : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ (vu au moment des fonctionns affines).

Propriété

Deux droites de coefficients directeurs m et m' sont parallèles si, et seulement si, $m = m'$.

III Systèmes d'équations linéaires à deux inconnues

III.1 Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

Définition

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y peut s'écrire sous la forme $\begin{cases} ax + \ by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres données.
Les deux équations doivent être vérifiées simultanément.

Définition

- Un couple $(x\ ;\ y)$ est solution du sytème s'il est solution simultanément de deux équations.
- Résoudre un système coonsiste à déterminer **tous** les copies solutions du système.

Remarque : les deux méthodes de résolution sont expliquées page 563 dans le livre.

III.2 Lien entre droites et systèmes

Propriétés

Soient les droites (d) et (d') d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.
Soit le système $\mathscr{S}$: $\begin{cases} ax + \ by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$.
Un poit $M(x\ ;\ y)$ appartient à d et à (d') si, et seulement si, le couple $(x\ ;\ y)$ est solution dun système $\mathscr{S}$.

Remarques :

- Si les deux droites sont sécante, elle ont un unique point d'intersection et le système a alors un seul couple solution.
- Si d et d' sont strictement parallèles, elles n'ont aucun point commun et le système n'a alors aucune solution.
- Si d et d' sont confondues, elles ont tous leurs points commun et le système a alorsune infinité de solutions..