2^{nde} : correction du TD sur les nombres

I

On considère la liste de nombres :

a) 10	b) 510	c) 34	d) 72
e) 85	f) 28	g) 60	h) 97

1. 10, 510, 85 et 60 sont des multiples de 5 (l'écriture décimale se terminant par 0 ou 5).
   (a) $10 = 5 \times 2$ (b) $510 = 5 \times 102$ (c) $85 = 5 \times 17$ (d) $60 = 5 \times 12$
2. Les multiples de 17 sont 510, 34, 85.
   (a) $510 = 17 \times 30$ (b) $34 = 17 \times 2$ (c) $85 = 17 \times 5$
3. Les multiples de 6 sont : 510, 72, 60
   (a) $510 = 6 \times 85$ (b) $72 = 6 \times 12$ (c) $60 = 6 \times 10$

II

On considère les nombres $a = 35$ et $b = 25$.

1. Donner un multiple de a et un multiple de b.
   Un multiple de a s'écrit sous la forme $a \times k$ avc $k \in \mathbb{Z}$; les premiers multiples de a sont :
   0 ; 35 ; 70 ; 105 ; 140 ; 175 ; 210 etc.

   Un multiple de b s'écrit sous la forme $b \times k$ avc $k \in \mathbb{Z}$; les premiers multiples de $b = 25$ sont :
   0 ; 25 ; 50 ; 75 ; 100 ; 125 ; 150 ; 175 ; 200 etc.
2. — Un multiple évident de a et b est le produit ab donc $35 \times 25 = 875$ est donc un multiple de 35 et de 25.
   — Un autre multiple commun à ces deux nombres est 175, qui appartient aux deux listes de multiples.
3. Le plus petit multiple commun strictement positif commun à ces deux nombres est 175.
   $\boxed{\text{PPCM}(35\ ;\ 25) = 175}$

III

1. L'ensemble des diviseurs de 15 est $\mathscr{D}(15) = \{[1 ; 3 ; 5 ; 15\}$
   L'ensemble des diviseurs de 35 est $\mathscr{D}(35) = \{1 ; 5 ; 7 ; 35\}$
   Le PGCD de ces deux nombres est 5.
2. L'ensemble des diviseurs de 60 est $\mathscr{D}(60) = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60\}$.
   L'ensemble des diviseurs de 40 est $\mathscr{D}(40) = \{1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 20 ; 40\}$.
   Le PGCD de 60 et 40 est 20.
3. L'ensemble des diviseurs de 45 est $\mathscr{D}(45) = \{1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 45\}$
   $\mathscr{D}(64) = \{1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64\}$.
   $\text{PGCD}(45 ; 64) = 1$; ce sont des nombres premiers entre eux.
4. $\mathscr{D}(270) = \{1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 15 ; 18 ; 27 ; 30 ; 45 ; 54 ; 90 ; 135 ; 270\}$
   $\mathscr{D}(180) = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 12 ; 15 ; 18 ; 20 ; 30 ; 36 ; 45 ; 60 ; 90 ; 180\}$.
   $\text{PGCD}(270 ; 180) = 90$

IV

Dans chacun des cas, chercher le plus grand diviseur commun au numérateur et au dénominateur puis mettre la fraction sous forme irréductible (non simplifiable)

1. $\mathscr{D}(45) = \{1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 45\}$; $\mathscr{D}(20) = \{1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 20\}$; $\text{PGCD}(45 ; 20) = 5$.
   On en déduit : $\dfrac{45}{20} = \dfrac{45 \div 5}{20 \div 5} = \boxed{\dfrac{9}{4}}$

2. PGCD(63 ; 42) = 21 donc $\dfrac{63}{42}=\dfrac{63\div 21}{42\div 21}=\boxed{\dfrac{3}{2}}$

3. PGCD(21 ; 56) = 1 donc 21 et 56 sont peers entre eux; $\dfrac{121}{56}$ est irréductible.

4. PGCD(270 ; 180) = 90 donc $\dfrac{270}{180}=\dfrac{270\div 90}{180\div 90}=\boxed{\dfrac{3}{2}}$

V (Vrai ou faux)

Déterminer, en justifiant, si chacune des affirmatons suivantes est vraie ou fausse :

1. Tout nombre entier strictement positif a un nombre pair de diviseurs.
   FAUX : 1 est strictement positif et n'a qu'un diviseur.
2. Il y a plus de nombres premiers entre 20 et 30 qu'entre 40 et 50. FAUX :
   les nombres premiers entre 20 et 30 sont 31 ; 37 ; ceux entre 40 et 50 sont 41 ; 43 ; 47
3. Un diviseur d'un nombre premier est toujours premier.
   FAUX : les nombres premiers sont divisibles par 1 qui n'est pas premier.

VI

Parmi les nombres rationnels suivants, quels sont ceux qui appartiennent à $\mathbb{D}$?

$\dfrac{3}{2}$ $\qquad\dfrac{5}{12}$ $\qquad\dfrac{4}{3}$ $\qquad\dfrac{7}{4}$ $\qquad-\dfrac{35}{25}$ $\qquad\dfrac{13}{20}$

1. $\dfrac{3}{2}=\dfrac{3\times 5}{2\times 5}=\dfrac{15}{10}$, quotient d'un entier par une puissance de 10 donc $\dfrac{3}{2}$ est décimal ou $\dfrac{3}{2}=1,5$ qui n'a qu'un chiffre après la virgule.
2. $\dfrac{5}{12}=0,41666666666666\cdots$; il y a une infinité de chiffres après la virgule donc ce nombre n'est pas décimal.
3. $\dfrac{4}{3}=1,33333\cdots$ donc ce nombre n'est pas décimal.
4. $\dfrac{7}{4}=1,75$ donc c'est un nom re décimal ou $\dfrac{7}{4}=\dfrac{7\times 25}{4\times 25}=\dfrac{175}{100}=\dfrac{175}{10^2}$, quotient d'un entier par une puissance de 10.
5. $-\dfrac{35}{25}=-\dfrac{35\times 4}{25\times 4}=-\dfrac{140}{100}$ qui est décimal.
6. $\dfrac{13}{20}=\dfrac{13\times 5}{20\times 5}=\dfrac{65}{100}$ donc c'est un nombre décimal.

VII

1. Montrer que le carré d'un nombre pair est pair.
   Soit n un nombre pair ; il existe donc $p\in\mathbb{Z}$ tel que $n=2p$.
   Alors $n^2=(2p)^2=4p^2=2\times 2p^2$ qui est un nombre pair (multiple de 2)
2. n est impair $n=2p+1$.
   Alors : $n=(2p+1)=(2p+1)(2p+1)=2p\times 2p+2p+2p+1=4p^2+4p+1=2\left(2p^2+2p\right)+1=2q+1$ avec $q=2p^2+2p$ donc on a bien un nombre impair.