2$^{\text{nde}}$: correction du TD1 sur les fonctions affines

I

Parmi les expressions suivantes, quelle sont celles de fonctions affines ? linéaires ? On précisera leurs coefficients directeurs.

- $f(x) = \sqrt{3}x - \dfrac{1}{5} = mx = p$ avec $\begin{cases} m = \sqrt{3} \\ p = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$ donc f est **affine**.
- $g(x) = \sqrt{2x+3}$; $g(x)$ ne peut pas se mettre sous la forme $mx = p$ donc g n'est **pas affine**.
- $h(x) = \pi x = mx = p$ avec $\begin{cases} m = \pi \\ p = 0 \end{cases}$; h est **linéaire** (fonction affine particulière)
- $k(x) = \dfrac{1-2x}{x-4}$; k n'est pas affine. L'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{4\}$, donc k **ne peut pas être affine**, puisqu'une fonction affine est définie sur $\mathbb{R}$.
  Autre raison : $k(x)$ ne peut se mettre sous la forme $mx = p$.
- $\ell(x) = 2(x - \sqrt{5}) - 2x = 2x - 2\sqrt{5} - 2x = -2\sqrt{5} = mx = p$ avec $\begin{cases} m = 0 \\ p = -2\sqrt{5} \end{cases}$.
  ℓ est une fonction **affine, constante**.

II

Donner le sens de variation des fonctions définies ci-dessous :

- $f(x) = 4 - 2x = -2x + 4 = mx = p$ avec $\begin{cases} m = -2 \\ p = 4 \end{cases}$;
  f est affine, son coefficient directeur est négatif, donc f est **décroissante**.
- $g(x) = x = mx = p$ avec $\begin{cases} m = 1 \\ p = 0 \end{cases}$;
  g est affine, son coefficient directeur est positif, donc g est **croissante**.
- $h(x) = \dfrac{-1+5x}{3} = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{3}x = \dfrac{5}{3}x - \dfrac{1}{3} = mx = p$ avec $\begin{cases} m = \dfrac{5}{3} \\ p = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$.
  h est affine, son coefficient directeur est positif, donc h est **croissante**.
- $k(x) = (\pi - 4)x + 6 = mx = p$ avec $\begin{cases} m = \pi - 4 < 0 \\ p = 6 \end{cases}$.
  k est affine, son coefficient directeur est négatif, donc k est **décroissante**.
- $\ell(x) = \dfrac{2x+3}{4} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{2x}{4} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{4} = \{mx = p$ avec $\begin{cases} m = 0 \\ p = \dfrac{3}{4} \end{cases}$.
  ℓ est affine, son coefficient directeur est nul, donc ℓ est **constante**.

III

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+3}{\pi}$.

$f(x) = \dfrac{1}{\pi}x + \dfrac{3}{\pi} = mx = p$ avec $\begin{cases} m = \dfrac{1}{\pi} \\ p = \dfrac{3}{\pi} \end{cases}$.

f est affine, croissante, car $a > 0$; f conserve donc l'ordre.

1. $f(x) > f(3)$ équivaut à $x > 3$; $\boxed{\mathscr{S} =]3\,;\,+\infty[}$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(3)$	$\nearrow$	

2. $f(1) < f(x) < f(4)$ équivaut à $1 < x < 4$ donc $\boxed{\mathscr{S} =]1\ ;\ 4[}$

IV

Donner le tableau de signe des fonctions affines suivantes :

1. $f : x \longmapsto 3x+5$
   f est affine.
   $f(x) = 0$ équivaut à $3x+5 = 0$, donc $3x = -5$ puis $x = -\dfrac{5}{3}$.
   Le coefficient directeur de cette fonction affine est $m = 3 > 0$; cette fonction est donc croissante.
   Tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f(x) = 3x+5$		$-$	0	$+$	

2. $f : x \longmapsto -2x+7$
   f est affine.
   $f(x) = 0$ équivaut à $-2x+7 = 0$ donc $x = \dfrac{7}{2}$ puisque $ax+p = 0$ pour $x = -\dfrac{b}{a}$ avec ici $m = -2$ et $p = 7$ (ou on résout l'équation $-2x+7 = 0$ directement).
   ‘ Le coefficient directeur est $a = -2$, négatif, donc f est décroissante.
   Tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

3. $f : x \longmapsto -5x-9$
   Tableau de signes : (même méthode que pour la question 2.)

x	$-\infty$		$-\frac{9}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

V

1. Déterminer la fonction linéaire f telle que
   $f(3) = 4$.
   f est affine donc il existe a tel que $f(x) = ax$.
   $f(3) = 4$ donne $a \times 3 = 4$ donc $3m = 4$ d'où $m = \dfrac{4}{3}$.
   on en conclut que $\boxed{f(x) = \dfrac{4}{3}x}$.
2. Déterminer la fonction affine g telle que
   $g(1) = 3$ et $g(-2) = -3$.
   Comme g est affine, il existe a et b tels que $g(x) = mx = p$.
   $g(1) = 3$ donc $a \times a + p = 3$.
   $g(-2) = -3$ donc $a \times (-2) + p = -3$, soit $-2a + p = -3$.
   a et b sont donc solutions du système : $\begin{cases} a + p = 3\ L_1 \\ -2a + p = -3\ L_2 \end{cases}$.

On soustrait les deux lignes : $L_1 - L_2$:
$(a+b)-(-2a+b)=3-(-3)$ d'où $a+b+2a-p=-6$ donc $3m=-6$ qui donne $m=-2$.
Or $a+p=3$, donc $p=3-m=3-2=1$.
Finalzmnt : $\boxed{f(x)=2x+1}$

3. Déterminer la fonction affine h telle que $h(2)=-5$ et $h(7)=3$.
h est affine donc il existe a et b tels que $h(x)=mx=p$.
$h(2)=-5$ équivaut à $2a+p=-5$
$h(7)=35$ équivaut à $7a+p=3$
a et b sont donc solutions du système $\begin{cases} 2a+p=-5 \ (L_1) \\ 7a+p=3 \ (L_2) \end{cases}$
En soustrayant les deux lignes, $L_2 - L_1$, on obtient :
$(7a+b)-(2a+b)=3-(-5)$ dnc $7a+b-2a-p=3+5$ d'où $5m=8$ qui donne, en divisant par 5 : $\boxed{m=\frac{8}{5}}$.
Cacule le b : $2a+p=-5$ donc $p=-5-2m=-5-2\times\frac{8}{5}=-5-\frac{16}{5}=\frac{-25-16}{5}=\boxed{-\frac{41}{5}}$.
Conclusion : l'expression de $h(x)$ est : $\boxed{h(x)=\frac{8}{5}x-\frac{41}{5}}$

VI

Dans la plupart des pays, les températures se mesurent en ˚C (Celcius) ; en Grande Bretagne ou aux États-Unis, les températures se mesurent en ˚F
(Fahrenheit).
Historiquement, Fahrenheit a décidé de définir son échelle par deux températures de référence :

- une température basse, la plus basse qu'il ait mesurée durant l'hiver de 1708 à 1709 dans sa ville natale de Dantzig. Plus tard, en laboratoire, il atteint cette température lors de la solidification d'un mélange d'un volume égal de chlorure d'ammonium et d'eau ;
- une température haute, celle du sang du cheval.

La conversion de degrés C en degrés F se fait désormais à l'aide d'une fonction affine $f : x \longmapsto mx=p$, où x est en degrés C.
On sait que, à pression normale :

- l'eau pure gèle à 0 ˚C et à 32 ˚F
- l'eau pure bout à 100 ˚C et à 212 ˚F

1. D'près les renseignements, on a :
$a\times 0+p=32$ d'où $p=32$
$a\times 100+p=212$.
a et b sont donc solutions du système $\begin{cases} p=32 \\ 100a+p=2122 \end{cases}$
La deuxièmeèmz équation donne $100m=212-32=180$ donc $m=\frac{180}{100}=\frac{9}{5}$.
Par conséquent : $\boxed{f(x)=\frac{9}{5}x+32}$
2. $f(30)=\frac{9}{5}\times 30+32=9\times 6+32=54+32=86$ donc 30 ˚C équivalent à 86 ˚F.
3. En déduire la température en ˚C quand elle est de -10 ˚F ?
Cela revient à chercher un antécédent de -10 par f.
On résout l'équation $f(x)=-10$ donc $\frac{9}{5}x+32=-10$.
On e déduit : $\frac{9}{5}x=-10-32=-42$ d'où $x=\frac{-42}{\frac{9}{5}}=-42\times\frac{5}{9}=\boxed{-\frac{210}{9}\approx -23{,}3˚\text{C}}$.