2^{nde} : corrigé du contrôle sur les fonctions (1 heure)

I (1 point)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a\,;\,b]$.
La courbe représentative de f sur I est l'ensemble des points $M(x\,;\,f(x))$ pour x appartenant à I (c'est du cours!)

II (4 points)

Soient f et g les fonctions définies par

$$f(x) = 3x+5 \text{ et } g(x) = \frac{1}{x+2}.$$

1. (a) L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut calculer $f(x) = 3x+5$.
   (b) L'ensemble de définition de g est $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ car on n'a pas le droit de diviser par 0 ; or, le dénominateur $x+2$ s'annule pour $x = -2$.
2. (a) L'image de 3 par f est $f(3) = 3\times 3+5 = 9+5 = 14$. $\boxed{f(3) = 14}$
   (b) $f(5) = 3\times 5+5 = 15+5 = 20$; $\boxed{f(5) = 20}$
   (c) $g(0) = \dfrac{1}{0+2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$ et $g(3) = \dfrac{1}{3+2} = \boxed{\dfrac{1}{5}}$
   (d) L'antécédent de 7 par f est le nombre x tel que $f(x) = 7$, donc $3x+5 = 7$.
   $3x+5 = 7$ donne $3x = 2$ d'où $x = \dfrac{2}{3}$.
   L'antécédent de 7 par f est $\boxed{x = \dfrac{2}{3}}$.

III (3,5 points)

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative sur $I =]-1\,;\,+\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$.

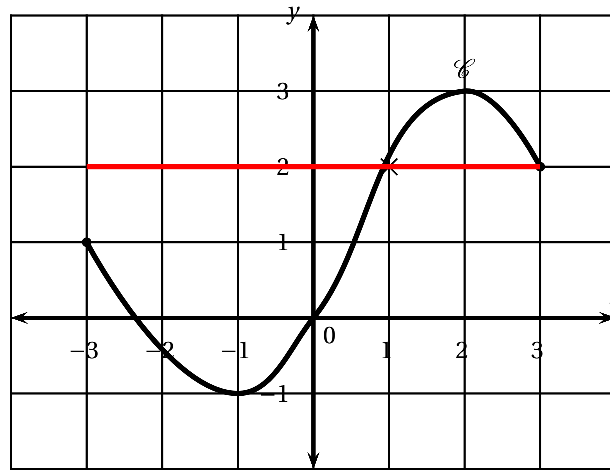
- L'abscisse de A n'appartient pas à l'ensemble de définition, donc A n'appartient pas à $\mathscr{C}$.
  Toutefois, si on avait pris l'ensemble complet de définition, $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on aurait $f(x_A) = f(-2) = \dfrac{-2}{-2+1} = \dfrac{-2}{-1} = 2 = y_A$ donc $\boxed{A \in \mathscr{C}}$.
- $f(x_B) = f(2) = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3} \neq 0{,}333$ donc $d(x_B) \neq y_B$ donc $\boxed{B \notin \mathscr{C}}$.
- $f(x_C) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{3} = y_C$ donc $\boxed{C \in \mathscr{C}}$.

IV (5,5 points)

On considère une fonction f dont la courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous.

1. L'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f est [-3 ; 3].
2. Le maximum de f sur $\mathscr{D}$ est 3 ; il est atteint pour $x = 2$.
3. Le minimum de f sur $\mathscr{D}$ est -1 ; il est atteint pour $x = -1$.
4. • L'image de -3 est $\boxed{f(-3) = 1}$.
   • L'image de -1 est $\boxed{f(-1) = -1}$.
5. Les antécédents de 2 par f sont 1 et 3
6. Tableau de variation de f :

x	-3		-1		2		3
$f(x)$	1	↘	-1	↗	3	↘	2



V (6 points)

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-8;5]$. Son tableau de variations est le suivant :

x	-8		-5		-3		2		5
$f(x)$	6	↘	1	↗	3	↘	0	↘	-2

1. $-\dfrac{17}{3} > -\dfrac{18}{3} = -6$ et $-\dfrac{17}{3} < \dfrac{-15}{3} = -5$ donc $-6 < -\dfrac{17}{3} < -5$.
   Sur l'intervalle [-8 ; 3], f est décroissante donc renverse l'ordre.
   $-\dfrac{17}{3} > -6$ donc $\boxed{f\left(-\dfrac{17}{3}\right) < f(-6)}$.
2. L'équation f$(x) = 2$ a trois solutions : une dans l'intervalle [-8 ; -5], une dans [-5 ; -3] et une dans [-3 ; 2].
3. L'inéquation $f(x) > 0$ a pour solutions $\boxed{\mathscr{S} = [-8\,;\,2[}$.
4. Pour chacune des propositions suivantes, justifier : si elle est vraie ; si elle est fausse ou si le tableau ne permet pas de conclure.
   (a) « Si x est un réel de l'intervalle $[-8;-3]$ alors $3 \leqslant f(x) \leqslant 6$. »
   FAUX : par exemple, $f(-5) = 1$ qui n'est pas compris entre 3 et 6.
   (b) « Si $3 \leqslant f(x) \leqslant 6$ alors $x \in [-8;-3]$. »
   VRAI : pour $x \in]-3\,;\,5]$, $f(x) \leqslant 3$.
   (c) « Tous les réels de l'intervalle $[-8;0]$ ont une image supérieure ou égale à 1. »
   Le tableau ne permet pas de conclure ; $0 \in [-3\,;\,2]$ mais on ne connaît pas l'image de 0, seulement qu'elle est comprise entre 0 e 3.