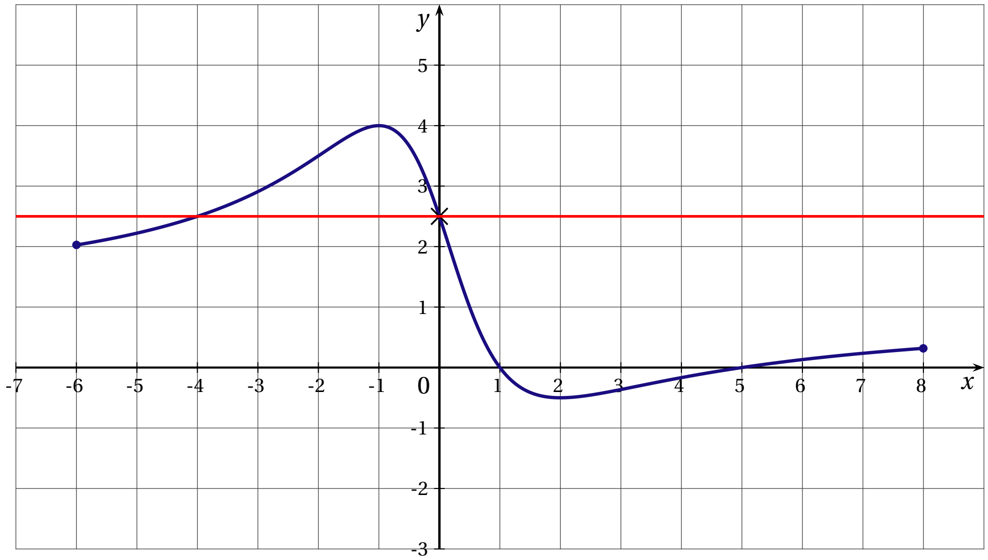
2^{nde} : correction du TD sur les fonctions (1)

I

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[-6;8]$. La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Graphiquement, l'image de 0 par la fonction f est $f(0) \approx 2,5$.
2. L'équation $f(x) = 0$ a pour solutions les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses : on trouve $\mathscr{S} = \{1 ; 5\}$.
3. L'inéquation $f(x) \geqslant \dfrac{5}{2}$ a pour solutions les abscisses de tous les points dont les ordonnées sont supérieures ou égales à 2,5, donc les abscisses des points situés au-dessus de la droite tracée en rouge sur la figure (dont tous les points ont une ordonnée ale à 2,5).
   $\mathscr{S} = \{-4 ; 0\}$.
4. Si a est un réel de l'intervalle $[-4;5]$, $f(a)$ décrit l'intervalle $[-0,5 ; 2,5]$

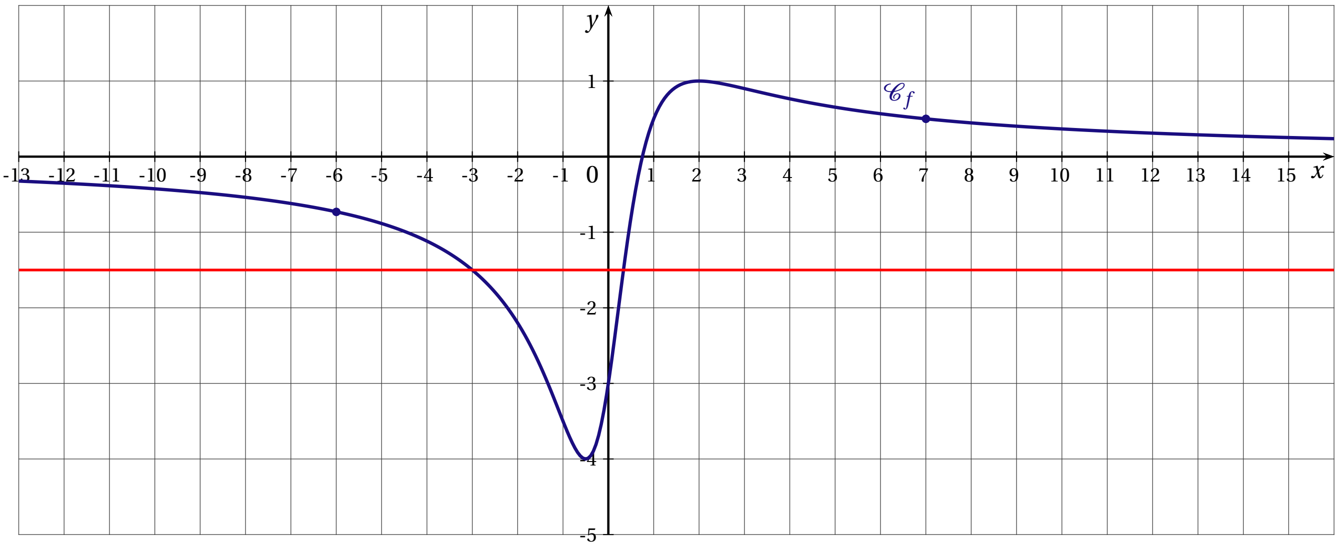
Remarque : la fonction tracée est définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 2}$

II

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-6;7]$ par $f(x) = \dfrac{4x-3}{x^2+1}$.

1. L'image de $-\dfrac{1}{2}$ par la fonction f est $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4 \times \left(-\dfrac{1}{2} - 3\right)}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1} = \dfrac{-2-3}{\dfrac{1}{4}+1} = \dfrac{-5}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{4}{4}} = \dfrac{-5}{\dfrac{5}{4}} = -\cancel{5} \times \dfrac{4}{\cancel{5}} = \boxed{-4}$.
2. Un antécédent de 0 par la fonction f est un nombre x tel que $f(x) = 0$.
   $f(x) = 0$ équivaut à $\dfrac{4x-3}{x^2+1} = 0$ donc à $4x - 3 = 0$ (car une fraction n'est nulle que si son numérateur est nul).
   $4x - 3 = 0$ équivaut à $4x - 3 + 3 = 0 + 3$ donc $4x = 3$ donc, en divisant par 4 :
   $\dfrac{4x}{4} = \dfrac{3}{4}$ d'où $\boxed{x = \dfrac{3}{4}}$.
   0 n'a qu'un antécédent par f, le nombre $\dfrac{3}{4}$.

3. $f(x) = 1$ équivaut à $\dfrac{4x-3}{x^2+1} = 1$ donc $4x-3 = x^2+1$ d'où $0 = x^2-4x+4$ qui s'écrit $(x-2)^2 = 0$ (en remarquant une identité remarquable, que nous verrons plus tard dans l'année).
$\boxed{\mathscr{S} = \{1\}}$.
4. La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est tracée ci-dessous.



5. Graphiquement, on trouve que l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = -\dfrac{3}{2}$ est $\boxed{\mathscr{S} = \{-3\ ;\ 0{,}25\}}$.

III

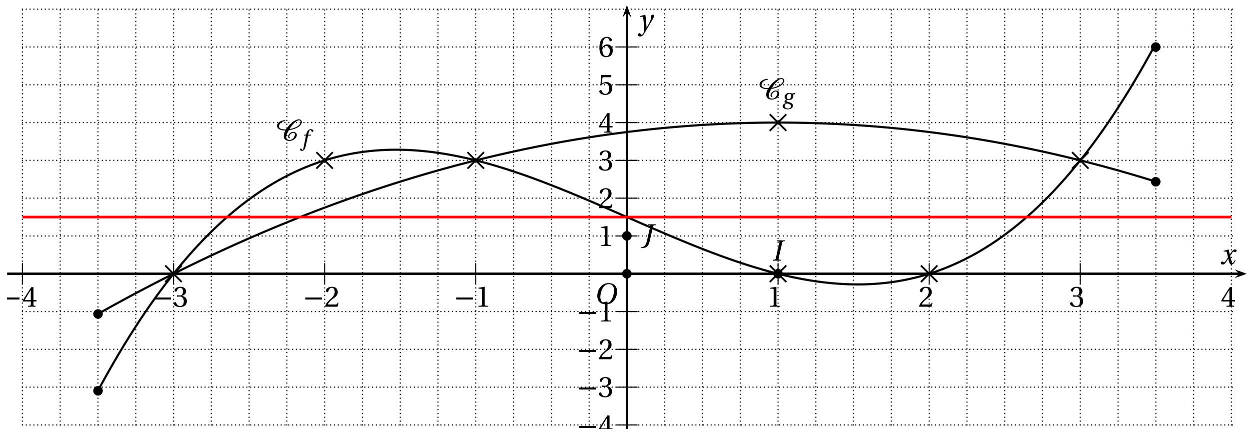
On considère la fonction f définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x+5}$.

1. La fonction est définie sur $[-2\ ;\ 2]$ donc l'ensemble de définition est $[-2\ ;\ 2]$.

   En fait, le dénominateur doit être différent de 0, donc il faut que $x \neq -5$.
   L'ensemble de définition est donc $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.
   On peut aussi écrire $\mathscr{D} =]-\infty\ ;\ -5[\cup]-5\ ;\ +\infty[$; l'intervalle proposé [-2; 2] est bien compris dans cet ensemble.
2. Un point $M(x\ ;\ y)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ si, et seulement si, $y = f(x)$. $f(0) = 0 = y_0$ donc $O(0\ ;\ 0) \in \mathscr{C}$
   $f(1) = \dfrac{1}{6} = y_A$ donc $A\left(1\ ;\ \dfrac{1}{6}\right) \in \mathscr{C}$
   $f(3) = \dfrac{9}{8} \neq y_B$ donc $B\left(3\ ;\ \dfrac{1}{5}\right) \notin \mathscr{C}$
   $f(-2) = \dfrac{(-2)^2}{-2+5} = \dfrac{4}{3} \neq y_C$ donc $C\left(-2\ ;\ \dfrac{4}{7}\right) \notin \mathscr{C}$
   $f(-3) = \dfrac{9}{2} = y_D$ donc $D\left(-3\ ;\ \dfrac{9}{2}\right) \in \mathscr{C}$.

IV

On donne sur la figure ci-dessous les courbes représentatives de deux fonctions f et g, nommées, respectivement, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, définies toutes deux sur l'intervalle $[-3,5\,;3,5]$.



Partie A

Des phrases sont proposées ci-dessous.
Indiquer si elles sont vraies ou fausses et, si elles sont fausses, les corriger pour qu'elles deviennent vraies.

1. L'image de -2 par g est 3 : faux, 3 est l'image de -2 par f.
2. $1,5$ a trois antécédents par f : vrai
3. 3 est un antécédent de -2 par f : vrai puisque $f(2) = 3$
4. 0 a pour image 2 par f : faux, $f(0) = 1,5$

Partie B

Avec la précision permise par le graphique, résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $f(x) = 0$: $\boxed{\mathscr{S} = \{-3\,;\,1\,;\,2\}}$
2. $g(x) > 0$: $\mathscr{S} =]-3\,;\,3,5]$
3. $f(x) \geqslant 3$: $\mathscr{S} = [-3\,;\,-2] \cup [3\,;\,3,5]$
4. $g(x) < 3$: $\mathscr{S} = [-3,5\,;\,-1[\cup]3\,;\,3,5]$
5. $f(x) = g(x)$ a pour solutions les abscisses des points d'intersection des deux courbes, puisque pour une même valeur de x, on doit avoir les mêmes ordonnées $f(x)$ et $g(x)$. $\boxed{\mathscr{S} = \{-3\,;\,-1\,;\,3\}}$.
6. $f(x) > g(x)$: les points de $\mathscr{C}_f$ doivent être en dessous de ceux de $\mathscr{C}_g$ pour une même valeur de x ; $\boxed{\mathscr{S} = [-3,5\,;\,-3[\cup]-1\,;\,3]}$.

Partie C

Déterminer graphiquement le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
(On pourra présenter sa réponse sous la forme d'un tableau.)
Sur $[-3,5\,;\,-3]$, $f(x) \leqslant 0$; sur $[-3\,;\,1]$, $f(x) \geqslant 0$; sur $[1\,;\,2]$, $f(x) \leqslant 0$ et sur $[2\,;\,3,5]$, $f(x) \geqslant 0$.
Résumons cela dans un tableau :

x	$-3,5$		-3		1		2		$3,5$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	