2nie : Géométrie dans l'espace

A Perspective cavalière

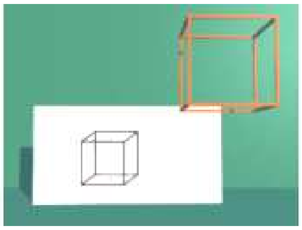
A - I Principe

Dans ce chapitre, nous allons travailler sur des objets en trois dimensions qui seront représentés, la plupart du temps, sur des feuilles de papier qui, elles, n'ont que deux dimensions et sur lesquelles il faudra donner l'illusion de la profondeur. C'est le but de la perspective.

La représentation que nous utiliserons s'appelle la *perspective cavalière*.

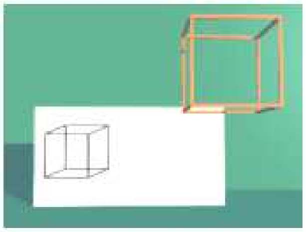
Le principe de la perspective cavalière est le suivant :

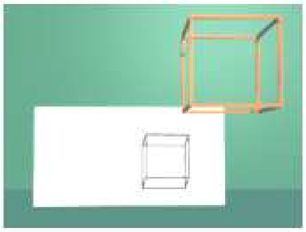
Vous faites face à un écran. Le soleil éclaire la scène (il est dans votre dos).
Un cube est placé devant l'écran et il projette son ombre sur cet écran.
Il est placé de telle façon que deux de ses faces sont parallèles à l'écran et deux autres horizontales.
Si les rayons du soleil ne sont pas perpendiculaires à l'écran, l'ombre du cube sur l'écran est une représentation en perspective cavalière du cube.



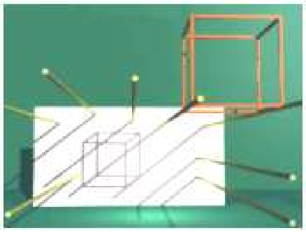
Remarques :

— Il arrivera parfois que le cube soit représenté sans faces parallèles à l'écran.
— Si les rayons sont perpendiculaires à l'écran, on parle de perspective orthogonale. Dans toute la suite, on exclura ce cas.
— On parle d'**une** représentation en perspective cavalière, car la forme de l'ombre dépend de la direction des rayons du soleil.



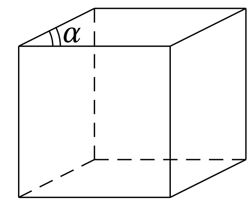


On appelle fuyante *une droite perpendiculaire à l'écran.*
Les ombres de toutes les fuyantes sont parallèles et leur direction commune dépend de celle des rayons du soleil.



A - II Construction et propriétés

A - II . 1 Construction



- L'angle α des fuyantes (droites perpendiculaires au plan de projection) vaut habituellement 30°, 45° ou 60°.
- Toutes les dimensions qui sont dans des plans parallèles au plan de projection sont représentées en vraie grandeur.
- Les dimensions qui sont portées par les fuyantes sont multipliées par un coefficient de réduction, en général compris entre 0,5 et 0,8.

A - II . 2 Propriétés

- *Des droites parallèles sont représentées sur le dessin par des droites parallèles.*
- *Des droites sécantes sont représentées sur le dessin par des droites sécantes.*
- *Les rapports de longueur sur une droite sont conservés sur le dessin.*
  Ainsi, par exemple, le milieu d'un segment est représenté sur le dessin par le milieu du segment obtenu.

Remarques :
Attention, les réciproques ne sont pas vraies. Ainsi :

- Deux droites qui semblent parallèles sur le dessin ne le sont pas toujours dans la réalité.
- Deux droites qui semblent sécantes sur le dessin ne le sont pas toujours dans la réalité.
- Un point qui semble être au milieu d'un segment dans la représentation en perspective cavalière n'est pas toujours le milieu du segment dans la réalité : il peut ne pas être sur le segment dans la réalité.

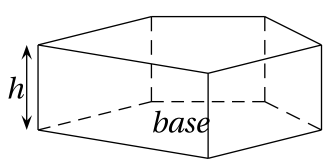
B Solides usuels et volumes

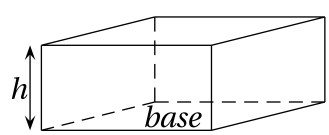
B - I Famille des prismes droits

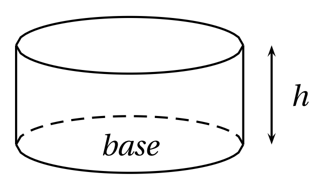
Prisme droit
Toutes les faces sont des rectangles sauf (éventuellement) les deux bases.

Pavé
Prisme droit dont les bases sont des rectangles.

Cylindre
Peut être considéré comme un prisme droit dont les bases sont des disques.







Propriétés Le volume de ces solides est donné par la formule suivante :

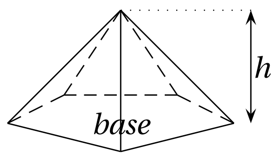
$$\text{Volume} = \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$$

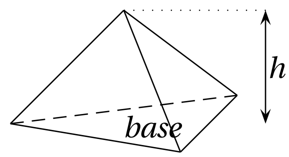
B - II Famille des pyramides

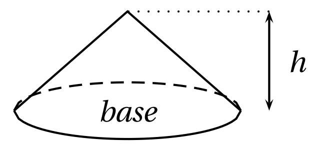
Pyramide
Constituée d'une base de forme quelconque et d'un sommet. Des arêtes joignent ce sommet à chacun des sommets de la base.

Tétraèdre
Pyramide dont la base est un triangle.

Cône de révolution
Peut être considéré comme une pyramide dont la base est un disque.







Propriétés Le volume de ces solides est donné par la formule suivante :

$$\text{Volume} = \frac{1}{3}\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$$

On peut ainsi mettre trois fois le volume d'un cône de révolution dans un cylindre de révolution ayant même base et même hauteur, ou trois fois le volume d'un tétraèdre dans un prisme droit ayant même base et même hauteur.

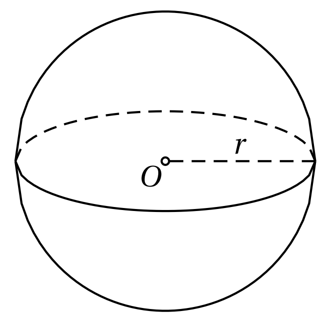
B - III Sphère

Propriétés Le volume d'une sphère de rayon r est donné par la formule :

$$\text{Volume} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

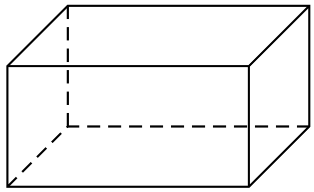
L'aire de la surface d'une sphère de rayon r est donnée par la formule :

$$\text{Aire} = 4\pi r^2$$

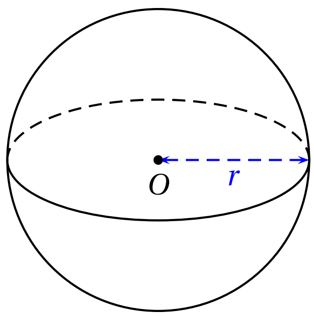


B - IV Volumes de l'espace

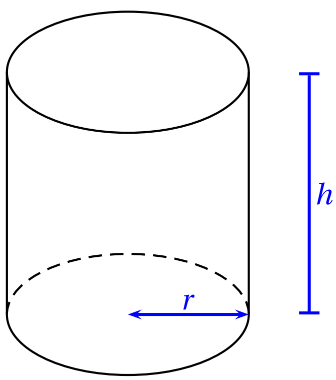
Parallélépipède rectangle : $V = L \times \mathrm{l} \times$ h.



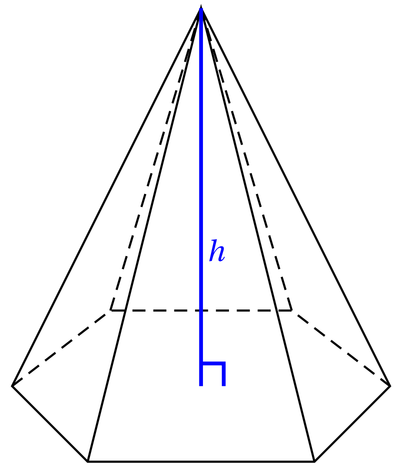
Sphère : V= $\frac{4}{3} \times \pi \times r^3$



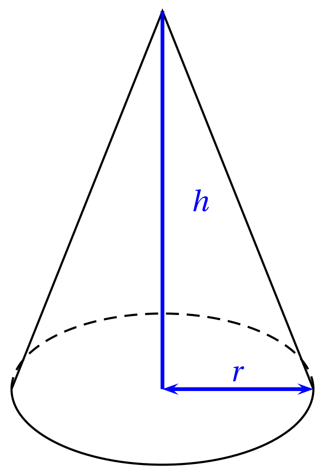
Cylindre de révolution : $V = \pi \times r^2 \times h$.



pyramide : $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{h}}{3}$.



Cône de révolution : $V = \dfrac{\pi \times r^2 \times h}{3}$.

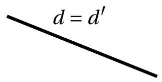


B - V Positions relatives dans l'espace

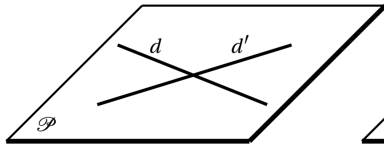
B - V . 1 Position relative de deux droites

Propriétés

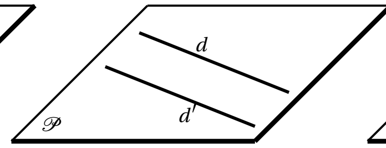
Deux droites d_1 et d_2 peuvent être coplanaires ou non coplanaires.
Si elles sont coplanaires (contenues dans le même plan), elles peuvent être sécantes en un point, strictement parallèles ou confondues. Si elles ne sont pas coplanaires, aucun plan ne contient les deux droites.
(exemple : certains arêtes d'un cube)



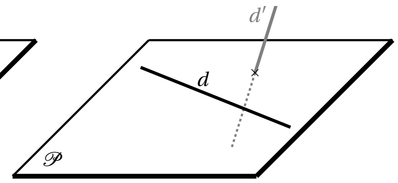
(a) : $d = d'$
parallèles, coplanaires.



(b) : d et d' *sécantes*
$d, d' \subset$ un unique plan.



(c) : d et d' *parallèles strictes*
$d, d' \subset$ dans un unique plan.



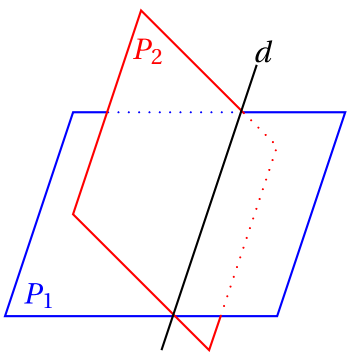
(d) : d et d' non coplanaires
d et d' ni sécantes, ni parallèles

B - V . 2 Position relative de deux plans

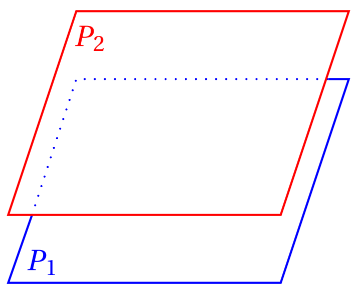
Propriétés

Deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.
S'ils sont sécants, l'intersection est une droite.
S'ils sont parallèles, ils sont distincts ou confondus.

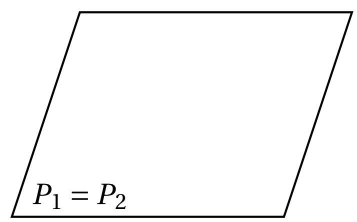
Plans sécants :
une droite d'intersection



Plans strictement parallèles :
aucun point d'intersection



Plans parallèles confondus :
un plan d'intersection

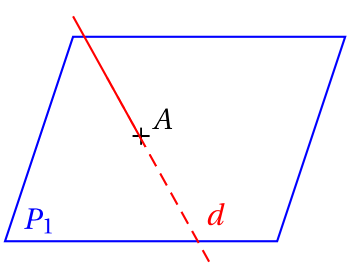


B - V . 3 Position relative d'une droite et d'un plan

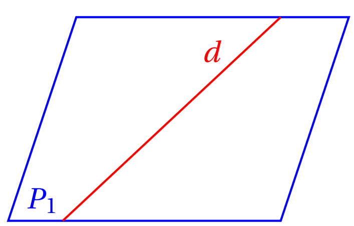
Propriétés

Une droite $\mathscr{D}$ et un plan $\mathscr{P}$ sont soit sécants, soit parallèles.
S'ils sont sécants, ils n'ont qu'un point commun.
S'ils sont parallèles, $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$ ou ils n'ont aucun point commun.

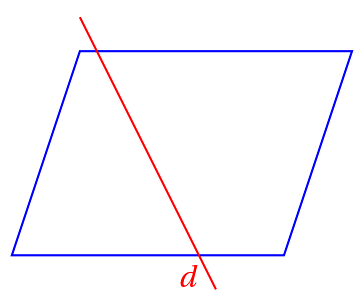
Droite et plan sécants :
un point d'intersection



Droite et plan parallèles :
droite incluse dans le plan



Droite et plan parallèles :
aucun point d'intersection



Remarques :

Pour définir un plan, il faut trois points distincts, ou une droite et un point extérieur à la droite, ou deux droites sécantes ou strictement parallèles.

B - VI Règles d'incidence

B - VI . 1 Propriété fondamentale

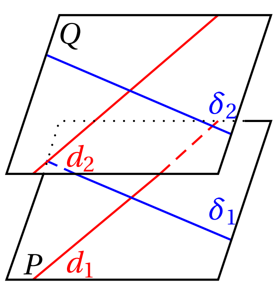
Dans un plan de l'espace, toutes les propriétés fondamentales de la géométrie plane s'appliquent.

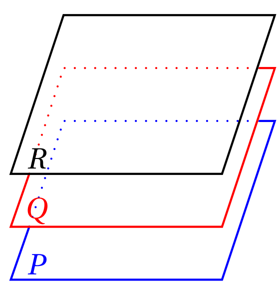
Propriétés

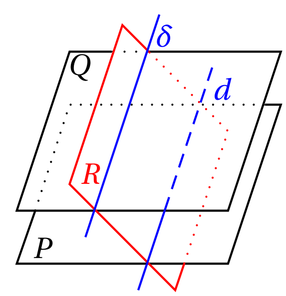
— Deux droites de l'espace sont **parallèles** si elles sont coplanaires et non sécantes,
— Deux plans de l'espace sont **parallèles** lorsqu'ils ne sont pas sécants,
— Une droite et un plan de l'espace sont **parallèles** lorsqu'ils ne sont pas sécants.

Propriété

— Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles,.
— Si deux droites sécantes d'un plan $\mathscr{P}$ sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan $\mathscr{Q}$ alors les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles,
— Si deux plans sont parallèles à un même troisième, alors ils sont parallèles,
— Si deux plans sont parallèles alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.





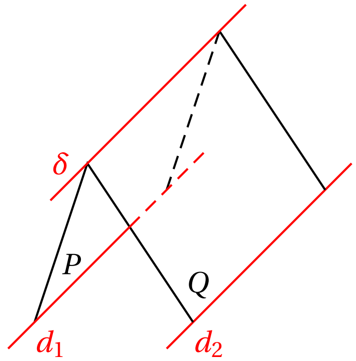


B - VI . 2 Théorème du « toit »

Théorème

Si on a :
— deux droites parallèles d et d' ;
— un plan Pcontenant d ;
— un plan Q contenant d' ;
— P et Q sécants selon une droite δ.

Alors, l'intersection δ des deux plans est parallèle aux droites d et d'.



B - VII Orthogonalité dans l'espace

B - VII . 1 Droite perpendiculaire à un plan

Propriété

Dans un plan $\mathscr{P}$, soient deux droites d_1 et d_2 sécantes en A et une droite Δ.
On suppose que la droite Δ est perpendiculaire en A à d_1 et en A à d_2.
Alors, la droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

B - VII . 2 Théorème

Théorème

Si une droite est perpendiculaire à un plan en un point A, alors elle est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan qui passent par A.