Équations et inéquations

Table des matières

I Équations

I-1 Définition d'une équation

Définition

Une équation est une égalité dans laquelle figurent un ou plusieurs nombres inconnus.
Résoudre cette équation consiste à trouver **toutes** les valeurs que peuvent prendre ce ou ces nombres inconnus pour que l'égalité soit vraie.

Exemples :

- 2x+3=0 a pour solution le nombre $-\dfrac{3}{2}$
- L'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2=-1$ est impossible dans $\mathbb{R}$.

I-2 Méthode générale de résolution

1. Propriété : on ne change pas une égalité en additionnant le même nombre aux deux membres d el'égalité ou en multipliant ou en divisant les deux membres par un nombre non nul. (principe d'une balance à plateaux)
2. Équations du premier degré (équations fondamentales) :
   - $x+a=b$ équiavaut à $x+a- = b-$ dnc $\boxed{x=b-a}$
   - $x-a=b$ équiavaut à $x-a+ = b+$ dnc $\boxed{x=b+a}$
   - $ax=b$ (avec $a \neq 0$) équivaut à $\dfrac{ax}{a}=\dfrac{b}{a}$ donc $\boxed{x=\dfrac{b}{a}}$
   - $\dfrac{x}{a}=b$ équivaut à $\dfrac{x}{a}\times = b\times$ donc $\boxed{x=ba}$
3. **Théorème fondamental (théorème du produit nul)** :

> **Théorème**
>
> Dans $\mathbb{R}$, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

Méthode :

- Sauf cas particulier, on transpose tout du même côté pour se ramener à une équation du type $A(x)=0$.
- On essaye de factoriser pour utiliser le théorème du produit nul.
  Pour cela, on essaye de repérer un facteur commun, sinon, une identité remarquable. S'il n'y a pas de factorisation possible, on développe.

Exemples :

(a) Résoudre l'équation $(3x+1)(x+4)=3x+1$.
Cette équation est équivalente à $(3x+1)(x+4)-(3x+1)=0$, soit $(3x+1)[(x+4)-1]=0$ donc $(3x+1)(x+3)=0$.
$3x+1=0$ donne $x=-\dfrac{1}{3}$, $x+3=0$ donne $x=-3$.
L'équation a deux solutions : $\mathscr{S}=\left\{-3\ ;\ -\dfrac{1}{3}\right\}$

(b) Résoudre l'équation : $(2x+5)^2=(3x-2)^2$.
On obtient : $(2x+5)^2-(3x-2)^2=0$, soit : $[(2x+5)+(3x-2)]\,[(2x+5)-(3x-2)]=0$ qui s'écrit :
$(5x+3)(-x+7)=0$.
Les solutions sont alors : $\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{3}{5}\ ;\ 7\right\}$.

I-3 Équations du type $x^2=a$

- Si $a<0$, l'équation n'a pas de solution, car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$, donc x^2 ne peut pas être égal à un nombre strictement négatif.
- $x^2=0$ a pour solution $x=0$
- Soit $a>0$; l'équation s'écrit $x^2-a=0$, c'est-à-dire $x^2-\left(\sqrt{a}\right)^2=0$ qui se factorise en $\left(x+\sqrt{a}\right)\left(x-\sqrt{a}\right)=0$.
  L'équation a donc deux solutions : $\mathscr{S}=\{-\sqrt{a}\ ;\ \sqrt{a}\}$.

I-4 Équation sous forme d'un quotient

Propriété

L'équation $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$ équivaut à $B(x) \neq 0$ et $A(x) = 0$

On commence par chercher les valeurs « interdites » qui annulent le dénominateur. L'ensemble de définition (valeurs réelles pour lesquelles l'expression globale est définie) est alors $\mathbb{R}$, privé de ces valeurs interdites.

Exemples :

(a) Résoudre l'équation $\dfrac{2x+3}{x-1} = 0$.
Condition d'existence : $x - 1 \neq 0$ donc $x \neq 1$.
Pour $x \neq 1$, l'équation s'écrit : $2x + 3 = 0$ qui donne $x = -\dfrac{3}{2}$.
$-\dfrac{3}{2} \neq 1$ donc $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}}$.

(b) Résoudre $\dfrac{x^2-1}{x+1} = 0$.
On commence par résoudre l'équation $x + 1 = 0$ qui a pour solution $x = -1$.
L'ensemble de définition est donc $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
On suppose maintenant $x \neq -1$.
L'équation s'écrit alors : $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 0$ qui a pour solutions -1 et 1.
Or, $x \neq -1$.
L'ensemble des solutions de l'équation est donc : $\boxed{\mathscr{S} = \{1\}}$.

II Inéquations

II-1 Comparaison de deux nombres

Propriété

$a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

Pour comparer deux nombres (c'est-à-dire savoir lequel est le plus grand), on étudie le signe de la différence.

II-2 Quelques règles sur les inégalités

II-3 Règle de l'addition et soustraction

Règle 1

Soient a, b et c trois réels alors :

- $a \leqslant b \Leftrightarrow a + c \leqslant b + c$
- $a \leqslant b \Leftrightarrow a - c \leqslant b - c$

Exemples :

- $2x+4 \leqslant 0 \iff 2x+4\mathbf{-4} \leqslant 0\mathbf{-4} \iff 2x \leqslant -4$
- $3x-2 < -3 \iff 3x-2\mathbf{+2} < -3\mathbf{+2} \iff 3x < -1$

II-4 Règles de la multiplication et division

Règle 2

Soient a, b deux réels et c un réel **positif** alors :

- $a \leqslant b \iff a \times c \leqslant b \times c$
- $a \leqslant b$ et $c \neq 0 \iff \dfrac{a}{c} \leqslant \dfrac{b}{c}$

Démonstration : puisque $a \leqslant b$: $b-a \geqslant 0$.
Pour comparer les deux nombres, on étudie le signe de leur différence :
Alors $bc-ac = c(b-a) \geqslant 0$ car $b-a \geqslant 0$ et $a \geqslant 0$, donc $\boxed{ac \leqslant bc}$.
De même : $\dfrac{b}{c} - \dfrac{a}{c} = \dfrac{b-a}{c} \geqslant 0$. Puisque $b-a \geqslant 0$ et $c \geqslant 0$ donc $\boxed{\dfrac{a}{c} \leqslant \dfrac{b}{c}}$.

Exemples :

- $2x > 7 \Leftrightarrow 2x\times\mathbf{3} > 7\times\mathbf{3} \Leftrightarrow 6x > 21$
- $3x \leqslant 4 \Leftrightarrow \dfrac{3x}{4} \leqslant \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \boxed{x \leqslant \dfrac{4}{3}}$
- $x\sqrt{2} \geqslant 3 \Leftrightarrow \dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \geqslant \dfrac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Règle n° 3

Soient a, b deux réels et c un réel négatif ou nul alors :

- $a \leqslant b \iff a \times c \geqslant b \times c$ (Changement de sens de l'inégalité)
- et $a \leqslant b$ et $c < 0 \iff \dfrac{a}{c} \geqslant \dfrac{b}{c}$ (Changement de sens de l'inégalité)

Même démonstration que dans le cas $c \geqslant 0$.

Exemples :

- $-x > 4 \iff -x\times(\mathbf{-1}) < 4\times(\mathbf{-1}) \iff x < -4$
- $-4x < -3 \iff \dfrac{-4x}{-4} > \dfrac{-3}{-4} \iff x > \dfrac{3}{4}$
- $-2x \geqslant 6 \iff \dfrac{-2x}{-2} \leqslant \dfrac{6}{-2} \iff x \leqslant -3$

II-5 Les inéquations du premier degré à une inconnue

II-6 Méthode de résolution

- $x+a \leqslant b \Leftrightarrow x+a-a \leqslant b-a \Leftrightarrow x \leqslant b-a$
- $x-a \leqslant b \Leftrightarrow x-a+a \leqslant b+a \Leftrightarrow x \leqslant b+a$
- Si $a>0$: $ax \leqslant b \Leftrightarrow \dfrac{ax}{a} \leqslant \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{b}{a}$
- Si $a<0$: $ax \leqslant b \Leftrightarrow \dfrac{ax}{a} \geqslant \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{b}{a}$
- Si $a>0$: $\dfrac{x}{a} \leqslant b \Leftrightarrow \dfrac{x}{a} \times a \leqslant b \times a \Leftrightarrow x \leqslant ab$
- Si $a<0$: $\dfrac{x}{a} \leqslant b \Leftrightarrow \dfrac{x}{a} \times a \geqslant b \times a \Leftrightarrow x \geqslant ab$

II-7 Signe de $ax+b$

On considère la fonction affine $f = x \mapsto ax+b$.
Si $a>0$, la fonction est croissante et si $a<0$, a fonction est décroissante.
$ax+b=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{a}$.
On en déduit le signe de $ax+b$:

Cas a $>$ 0 :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

Cas a $<$ 0 :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

II-8 Signe d'un produit de binômes

On appelle binôme une expression du type $ax+b$ (ou polynôme du premier degré).

Propriété fondamentale

- Le produit de deux nombres de même signe est positif.
- Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif

Méthode :
Pour étudier le signe d'une produit de binômes :

- on étudie le signe de chacun d'entre eux,
- on récapitule tout cela dans un tableau de signes (une ligne par binôme)
- puis dans la dernière ligne, on trouve le signe du produit en appliquant la règle en appliquant la règle sur le signe d'un produit.

Exemple : étudions le signe de $A(x) = -x(2x-3)(x+6)(4-2x)$

- Cherchons les valeurs de x qui annulent chacun des quatre binômes de $A(x)$:
- $-x=0 \Leftrightarrow x=0$
- $2x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ et $2x-3>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{3}{2}$

- $x+6=0 \Leftrightarrow x=-6$ et $x+6>0 \Leftrightarrow x>-6$
- $4-2x=0 \Leftrightarrow x=2$ et $4-2x>0 \Leftrightarrow -2x>-4 \Leftrightarrow x<2$ (en divisant par -2 qui est négatif, d'où le changement de sens de l'inégalité)
- Dressons maintenant le tableau des signes de $A(x)$:

x	$-\infty$		-6		0		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$2x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$4-2x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

- **Conclusion** :

  $A(x)>0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;\,-6[\cup \left]0\,;\,\frac{3}{2}\right[\cup]2\,;\,+\infty[$

  $A(x)<0 \Leftrightarrow x \in [-6\,;\,0[\cup \left]\frac{3}{2}\,;\,2\right[$

II-9 Signe d'une expression rationnelle factorisée

Définition

Une expression rationnelle factorisée est une expression littérale de la forme :

$$\frac{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)\cdots(a_nx+b_n)}{(a'_1x+b'_1)(a'_2x+b'_2)(a'_3x+b'_3)\cdots(a'_nx+b'_n)}$$

avec a_1, $a_2 \ldots a_n$ et a'_1, $a'_2 \ldots a'_n$ non nuls.

⚠**Attention** : dans ce genre d'expressions, il y a des **valeurs interdites**.
Il faut donc commencer par chercher ces valeurs interdites !
On fait alors un tableau de signes comme pour un produit.
Exemple :
Étudions le signe de $B(x)=\dfrac{2x(3x-6)}{(x-3)(1-x)}$

- Cherchons les valeurs de x qui annulent chacun des binômes de $B(x)$: $2x=0 \Leftrightarrow x=0$

  $3x-6=0 \Leftrightarrow x=2$ et $3x-6>0 \Leftrightarrow x>2$

  $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ et $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$

  $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$ et $1-x>0 \Leftrightarrow x<1$

  1 et 3 sont donc des valeurs interdites.
- Dressons maintenant le tableau des signes de $B(x)$:

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$	
$3x-6$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$x-3$		$-$		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$+$	
$1-x$		$+$		$+$	‖	$-$		$-$	‖	$-$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

- **Conclusion :**
  $B(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0\,;\,1[\cup]2\,;\,3[$

  $B(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;\,0[\cup]1\,;\,2[\cup]3\,;\,+\infty[$
  $B(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0\,;\,2\}$

III Pour s'entraîner sur le site euler de l'académie de Versailles

- Résolutions dans R d'équations de la forme $x^2 = a^2$ ou $x^2 = a^2$ où a est un entier naturel : cliquer ici
- Résolutions dans R d'équations de la forme $x^2 = a$ où a est un nombre donné en écriture fractionnaire : cliquer ici
- Résolutions dans R d'équations de la forme $(axb)^2 = (cxd)^2$ où a, b, c et d sont quatre entiers relatifs : cliquer ici
- Résolutions dans R d'équations de la forme (xa)2=(xb)2 où a et b sont deux entiers relatifs : cliquer ici
- Résolution d'équations de la forme P(x)=0 où P(x) est un produit de facteurs du premier degré : cliquer ici
- Résolution d'équations de la forme P(x)=0 où P(x) peut être factorisé en utilisant une identité remarquable dont les coefficients sont entiers : cliquer ici
- Résolution d'équations de la forme P(x)=0 où P(x) peut être factorisé en utilisant une identité remarquable dont les coefficients sont écrits sous forme fractionnaire : cliquer ici
- Etude du signe d'un produit de facteurs du premier degré : cliquer ici
- Résolution d'inéquations de la forme P(x)>0, P(x)<0, ... où P(x) est un produit de facteurs du premier degré : cliquer ici
- Résolution d'inéquations de la forme Q(x)>a, Q(x)<a, ... où Q est une fonction rationnelle et a un nombre rationnel : cliquer ici