

Géométrie repérée dans le plan

Table des matières

I	Sur une droite	1
II	Repérage dans le plan	1
III	Coordonnées du milieu d'un segment	2
IV	Distance entre deux points	3

I Sur une droite



Définition

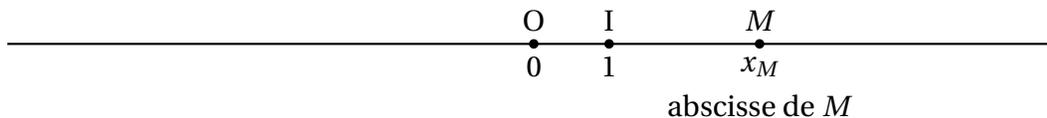
Soit une droite (d). On choisit un point O comme origine et un point I correspondant à l'unité.

Le couple $(O ; I)$ est alors appelé **repère de la droite**.

Alors, tout point M est repéré par un unique réel x , appelé abscisse de M .

Réciproquement, à chaque nombre réel correspond un point.

L'ensemble des abscisses des points de la droite sont les nombres **réels**. L'ensemble des réels est noté \mathbb{R} .



II Repérage dans le plan



Définition

Pour repérer un point dans le plan, on trace deux droites (**axes**) sécants en O , origine du repère.

Sur un axe, on place un point I qui permet de définir un repère sur cet axe.

De même, sur l'autre axe, on choisit un point J qui définit un repère sur cet axe. (pas forcément la même unité)

$(O ; I ; J)$ définit alors un **repère du plan**. (attention, l'ordre est important)

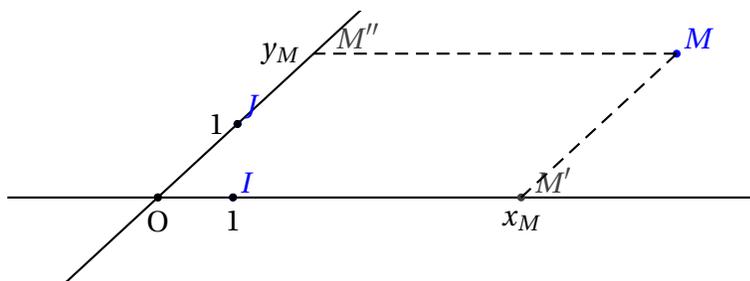
Soit M un point quelconque. On trace les parallèles aux axes passant par M ; elles coupent ces deux axes en M' et M'' .

M' est repéré par un nombre x_M et M'' par un nombre y_M .

On dit que x_M et y_M sont les coordonnées de M dans le repère $(O ; I ; J)$.

x_M est l'abscisse de M et y_M l'ordonnée de M . Ces deux nombres sont les coordonnées de M .

On écrit : $M(x_M ; y_M)$. (M est écrit un interligne en dessous de la ligne principale)



Remarque : on commence toujours par l'abscisse (axe défini par O et I).

Définition

Prendre des axes quelconques n'est pas toujours pratique. Quand on peut, on les prend perpendiculaires.

Si les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires, on dit que le repère $(O ; I ; J)$ est **orthogonal**.

Si le repère est orthogonal et que, de plus, les longueurs OI et OJ sont égales, on dit que le repère est **orthonormal** ou **orthonormé**.

Propriétés

Deux points sont confondus si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées.

III Coordonnées du milieu d'un segment

Définition

Soient deux points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points. Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Cela revient à calculer la moyenne des abscisses et des ordonnées.

Exemples d'application :

Exemple 1 Dans le plan muni d'un repère $(O ; I ; J)$, on considère les points $A(-3 ; -1)$, $B(5 ; -2)$, $C(7 ; 3)$ et $D(-1 ; 4)$.

Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Solution :

Notons K et L les milieux des deux diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3 + 7}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_L = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{5 + (-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } y_L = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

K et L sont les mêmes coordonnées donc $K = L$.

Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ ont le même milieu : **ABCD est un parallélogramme**.

Exemple 2 On considère les points A(2; 5), B(-1; 7) et C(11; 13).

On cherche les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

Solution

On note x_D et y_D les coordonnées de D.

ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, les diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu.

Soit M le milieu de [AC]; on a :

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{13}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = 9 \end{cases}$$

De même, les coordonnées du milieu de [AD] sont :

$$\begin{cases} \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{-1 + x_D}{2} \\ \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{7 + y_D}{2} \end{cases}$$

Les deux diagonales ont le même milieu, donc on doit avoir égalité entre les coordonnées :

Donc $\frac{-1 + x_D}{2} = \frac{13}{2}$ d'où $-1 + x_D = 13$, donc $x_D = 14$.

$\frac{7 + y_D}{2} = 9$ donc $7 + y_D = 18$ d'où $y_D = 11$.

D a pour coordonnées **D(14; 11)**.

IV Distance entre deux points



Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O; I; J).

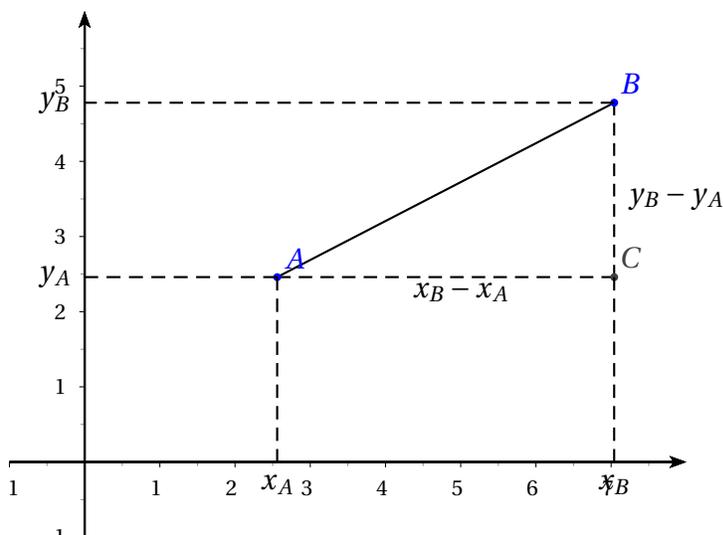
On considère les points A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B).

Alors, la distance AB vaut : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Démonstration :

Supposons que $x_B > x_A$ et $y_B > y_A$.

Cette démonstration est basée sur le théorème de Pythagore.



Comme le repère est orthonormé, le triangle ABC est rectangle.

D'après le théorème de Pythagore, on a : $AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.

Par conséquent : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

On admet que cette démonstration est valable quelles que soient les positions de A et de B, car $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$ et $(y_B - y_A)^2 = (y_A - y_B)^2$.

Remarque : cette formule est à apprendre par cœur et à appliquer directement.

Exemple : Soient A(3 ; 7) et B(2 ; 13).

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2 - 3)^2 + (13 - 7)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 6^2} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37} \text{ donc } AB = \sqrt{37}$$

Exercice :

Montrer que le point A(1 ; $\sqrt{2}$) appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}.$$

La longueur OA est égale au rayon du cercle donc A appartient au cercle.

Exercice :

Soient A(1 ; -2) et B(4 ; 2).

Montrer que B appartient au cercle de centre C de centre A et de rayon 5.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

B appartient bien au cercle de centre A et de rayon 5.

Exercice :

Soient A(-2 ; -1), B(1 ; 3) et C(-3 ; 6).

Démontrer que ABC est rectangle isocèle.

- $AB = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
- $BC = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$
- $AC = \sqrt{(-3 - (-2))^2 + (6 - (-1))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50}$
- $AB = BC$ donc ABC est isocèle.
- $AC^2 = \sqrt{50}^2 = 50$; $AB^2 + BC^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$.
 $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle.

Il est donc **isocèle rectangle en B**.