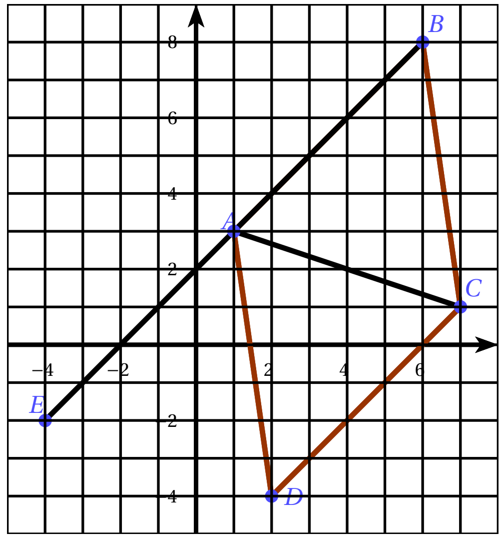
Correction du sujet révisions du contrôle commun

Exercice I

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points

$$A(1\ ;\ 3); B(6\ ;\ 8); C(7\ ;\ 1) \text{ et } D(2\ ;\ -4)$$

1. Faire une figure.



2. On cherche dans cette question à déterminer la nature exacte du quadrilatère $ABCD$.
   (a) Soit M le milieu de $[AC]$ et soit M' le milieu de [BD].
   - $x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{1+7}{2} = 4$; $y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2}\dfrac{3+1}{2} = 2$ donc $\boxed{M(4\ ;\ 2)}$.
   - $x_{M'} = \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{6+2}{2} = 4$; $y_{M'} = \dfrac{y_B + y_D}{2}\dfrac{8+(-4)}{2} = 2$ donc $\boxed{M'(4\ ;\ 2)}$.

   $M = M'$ puisque les deux points ont les mêmes coordonnées.
   Le quadrilatère ABCD a deux diagonales qui se coupent en leur milieu : c'est un parallélograme.

   (b)
   - $AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + \left(y_D - y_A\right)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{1+49} = \boxed{\sqrt{50}}$.
   - $DC = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + \left(y_D - y_C\right)^2} = \sqrt{(2-7)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{25+25} = \boxed{\sqrt{50}}$.
   - $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2} = \sqrt{(7-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{36+4} = \boxed{\sqrt{40}}$.

   On en déduit que $\boxed{AD = DC}$ donc le triangle ADC est **isocèle**.

   (c) $ABCD$ est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur : c'est un **losange**.
3. Soit E le symétrique de B par rapport à A. A est donc le milieu de [BE].
   $x_A = \dfrac{x_B + x_E}{2}$ donc $2x_A = x_B + x_E$ d'où $x_E = 2x_A - x_B = 2 - 6 = -4$.
   $y_A = \dfrac{y_B + y_E}{2}$ donc $2y_A = y_B + y_E$ d'où $y_E = 2y_A - y_B = 6 - 8 = -2$.
   E a pour coordonnées $\boxed{E(-4\ ;\ -2)}$

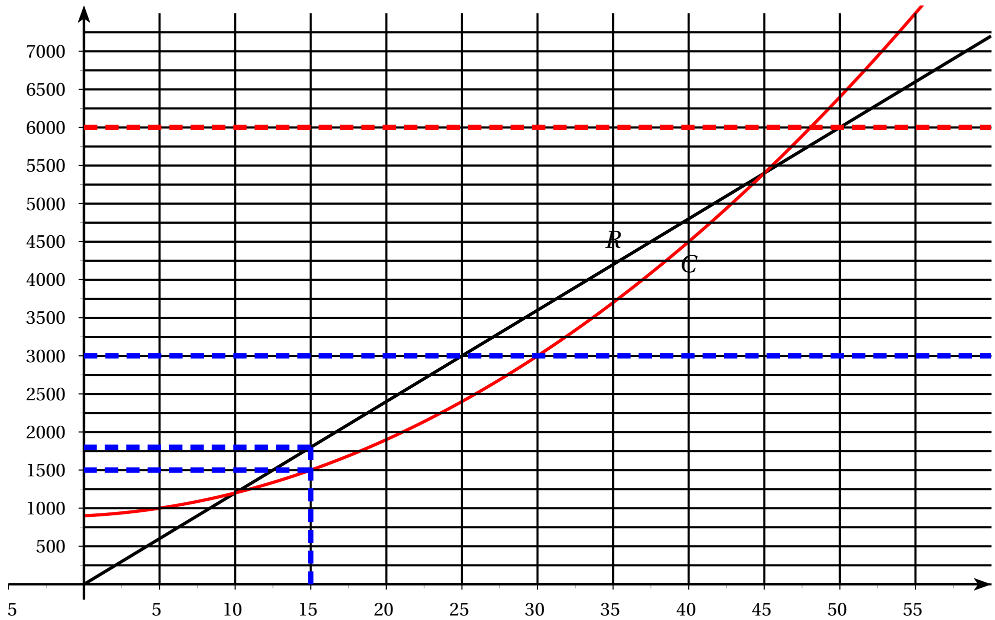
Exercice II

Une entreprise fabrique chaque jour des tablettes numériques, au maximum 60 tablettes et on admet qu'elle vend toute sa production.

On a représenté graphiquement les fonctions C (coût total) et R (recette) sur $[0;60]$.

Le coût total et la recette sont exprimés en euros.

On rappelle que le bénéfice se calcule en retranchant à la recette les coûts de production.



1. (a) On lit graphiquement (voir les lignes pointillées sur le graphique) : $\boxed{R(15) \approx 1\,800}$ et $\boxed{C(15) \approx 1\,500}$.
   (b) La vente de 15 tablettes rapporte 1 800 € et le coût total correspondant à 15 tablettes est de 1 500 €
   (c) Le bénéfice pour la production de 15 tablettes est donc d'environ 300 €.
2. (a) Les solutions de l'équation $C(x) = 3\,000$ sont les abscisses des points de la courbe correspondant à la fonction C et ayant une ordonnée égale à 3 000.
   On trouve $\boxed{x \approx 30}$
   (b) La production de 30 tablettes coûte 3 000 tablettes.
3. (a) Les solutions de l'inéquation $R(x) \leqslant 6\,000$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de R et ayant une ordonnées inférieure ou égale à 6 000.
   $\boxed{\mathscr{S} = [0\ ;\ 50]}$
   (b) Si l'entreprise fabrique moins de 50 tablettes, sa recette est inférieure ou égale à 6 000 €.
4. (a) On regarde les abscisses des points d'intersection des deux courbes : l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{D} = \{10\ ;\ 45\}}$
   (b) Si l'entreprise fabrique 10 ou 45 tablettes, son bénéfice est nul.
5. (a) L'inéquation à résoudre est : $R(x) \leqslant C(x)$.
   (b) Le bénéfice serait négatif pour $\boxed{0 \leqslant x \leqslant 10 \text{ ou } 45 \leqslant x \leqslant 60}$ donc $\boxed{\mathscr{S} = [0\ ;\ 10] \cup [45\ ;\ 60]}$.

Exercice III

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{5}x + 1$$

$$g(x) = -5x^2 + 2$$

1. $f(-1) = \frac{2}{5} \times (-1) + 1 = -\frac{2}{5} + 1 = -\frac{2}{5} + \frac{5}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}$.
   $f(5) = \frac{2}{5} \times 5 + 1 = 2 + 1 = \boxed{3}$.
2. $g(0) = -5 \times 0^2 + 2 = \boxed{2}$ et $g(-1) = -5 \times (-1)^2 + 2 = -5 + 2 = \boxed{-3}$.
3. Un antécédent de 7 est un nombre x tel que $f(x) = 7$.
   $f(x) = 7$ donne $\frac{2}{5}x + 1 = 7$ donc $\frac{2}{5}x = 6$ donc $x = \frac{6}{\frac{2}{5}} = 6 \times \frac{5}{2} = 3 \times 5 = \boxed{15}$.
   $\boxed{\text{7 a pour antécédent 15 par } f}$.

De même, $f(x) = -3$ donc $\frac{2}{5}x + 1 = -3$ donc $\frac{2}{5}x = -4$ et $x = \frac{-4}{\frac{2}{5}} = -4 \times \frac{5}{2} = -2 \times 5 = -10$.

$\boxed{\text{L'antécédent de -3 par } f \text{ est -10}}$.

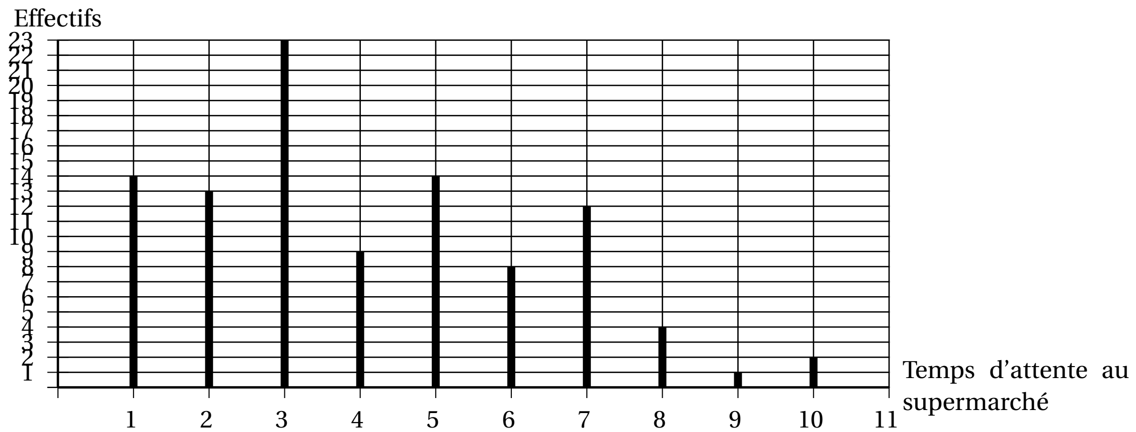
4. Pour déterminer les antécédents de 4 par g, on résout $g(x) = 4$.
   $g(x) = 4$ donne $-5x^2 + 2 = 4$ donc $-5x^2 = 4 - 2 = 2$ qui n'a aucune solution puisque $-5x^2 < 0$ et $2 > 0$.
   $\boxed{\text{4 n'a pas d'antécédent par } g}$.
5. $f(0) = 1$; $g(0) = 2$ donc $f(0) \leqslant g(0)$. On ne peut donc pas affirmer que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout x puisque 'est faux pour $x = 0$.

Exercice IV

Un directeur de supermarché décide d'étudier le temps d'attente aux caisses. Pour cela, il note le lundi et le vendredi les temps d'attente en minutes, de 100 clients.

A. Étude de l'échantillon du lundi

Le lundi, il obtient la répartition suivante :



1. Tableau complété :

Temps d'attente (en min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	14	13	23	9	14	8	12	4	1	2
E.C.C.	14	27	50	59	73	81	93	97	98	100

2. Le temps moyen d'attente aux caisses du supermarché pour cet échantillon est
   $\overline{x} = \frac{(1 \times 14) + (2 \times 13) + \cdots + (10 \times 2)}{100} = \frac{408}{100} = \boxed{4,08}$.
   Le temps d'attente moyen est 4,08 min, soit 4 min + $0,08 \times 60$ s d'où 4 min 4,8 s.
3. L'effectif total vaut $N = 100$ qui est pair ; la médiane est alors : $Me = \frac{x_{50} + x_{51}}{2} = \frac{3+4}{2} = \boxed{3,5}$.
   $\frac{N}{4} = 25$ donc le premier quartile est $Q_1 = x_{25} = \boxed{2}$.
   $\frac{3N}{4} = 75$ donc le troisième quartile est $Q_3 = x_{75} = \boxed{6}$.
4. Le nombre de clients attendant 7 minutes ou plus est $100 - 81 = 19$; $\frac{19}{100} = 19\,\% > 15\,\%$.

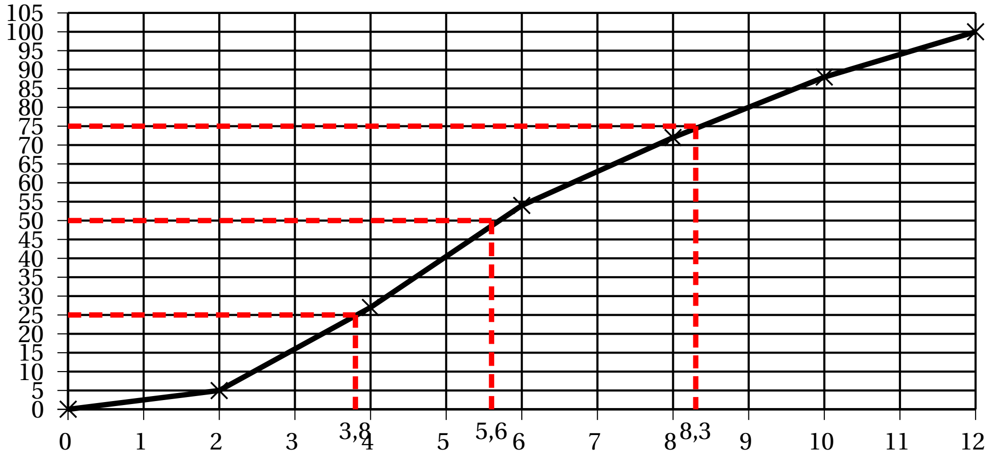
   Le directeur adjoint doit ouvrir une nouvelle caisse.

B. Étude de l'échantillon du vendredi

Le vendredi, il obtient la répartition suivante :

Temps d'attente en caisse	[0 ;2[	[2 ;4[	[4 ;6[	[6 ;8[	[8 ;10[	[10 ;12]
Effectif	5	22	27	18	16	12
Fréquence	0,05	0,22	0,27	0,18	0,16	0,12
Fréquence cumulée croissante (FCC)	0,05	0,27	0,54	0,72	0,88	1

1. Le temps d'attente moyen est $\frac{(1 \times 5) + \cdots + (11 \times 12)}{100} = \frac{608}{100} = 6,08$ min $= 6$ min 4,8 s.

2. 

3. On regarde les points de la courbe des fréquences cumulées croissantes ayant pour ordonnées 25, 50 et 75.
   Graphiquement, on trouve $\boxed{Q_1 \approx 3,8}$, $\boxed{Me = 5,6}$ et $\boxed{Q_3 = 8,3}$.

C. Comparaison des deux échantillons

Les clients qualifient de tolérable un temps d'attente compris entre 2 et 6 minutes inclus.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse :

1. « Le vendredi, au moins un quart des clients attendent au plus trois minutes en caisse ».
   FAUX : : $Q_1 \approx 3,8$ donc au moins un quart des clients attendent au plus 3,8 minutes en caisse.
2. « Il y a autant de clients qui trouvent le temps d'attente acceptable le lundi que le vendredi ».
   FAUX : : le lundi, il y a 67 clients qui attendent entre 2 et 6 minutes (donc un temps acceptable) et le vendredi, il y en a 49.

Exercice V

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Parmi les fonctions suivantes, préciser lesquelles sont affines. Justifier soigneusement.
   - $f : x \mapsto 1 - 2x$ $f(x) = ax + b$ avec $\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$ donc f est affine.
   - $g : x \mapsto \dfrac{1}{x} + 3$
     g n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ puisque 0 est une valeur interdite, donc g n'est pas affine.
     D'autre part, $g(x)$ ne peut pas se mètre sous la forme $ax + b$.
   - $h : x \mapsto 2x^2 + 3$
     $h(x) = 2x^2 + 3$ n'est pas sous la forme $ax + b$ donc h n'est pas affine.
   - $i : x \mapsto -x + 7$
     $i(x) = -x + 7 = ax + b$ avec $\begin{cases} a = -1 \\ b = 7 \end{cases}$ donc i est affine.
2. Soit $k : x \mapsto 3x + 21$
   (a) k est affine, de coefficient directeur 3, positif. k est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
   Tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
$i(x)$		$\nearrow$

   (b) $k(x)$ s'annule pour $x = -\dfrac{b}{a}$ avec $a = 3$
   $b = 21$, donc pour $x = -\dfrac{21}{3} = -7$.
   Comme k est croissante, on en déduit le **tableau de signes** :

x	$-\infty$		-7		$+\infty$
$k(x)$		$-$	0	$+$	