2nde : correction du contrôle (équations, inéquations)

I

1. Compléton le tableau de signes :

- $2x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$
- $x \longmapsto 2x-3$ est croissante car le coefficient directeur 2 est positif, donc l'expression est négative pour $x \leqslant \dfrac{3}{2}$ puis positive pour $x \geqslant \dfrac{3}{2}$.
- $x+7$ s'annule bien pour $x=-7$
- $x \longmapsto x+7$ est croissante car le coefficient directeur 1 est positif, donc l'expression est négative pour $x \leqslant -7$ puis positive pour $x \geqslant -7$.

x	$-\infty$		-7		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-3)(x+7)$		$+$		$-$		$+$	

II

Résoudre les équations suivantes :

1. $(3x+5)(-7x+2)=0$.
Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.
   - Premier cas : $3x+5=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{3}$
   - Deuxième cas : $-7x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{7}$

   L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{5}{3}\,;\,\dfrac{2}{7}\right\}}$.

2. $(3x+5)(7x+3)-(3x+5)(5x+1)=0$.
On factorise : $\underbrace{(3x+5)}_{\text{facteur commun}}(7x+3)-\underbrace{(3x+5)}_{\text{facteur commun}}(5x+1)=0 \Leftrightarrow (3x+5)\left((7x+3)-(5x+1)\right)=0$
$\Leftrightarrow (3x+5)(7x+3-5x-1)=0 \Leftrightarrow \boxed{(3x+5)(2x+2)=0}$.
On peut encore améliorer la factorisation avec : $\boxed{2(3x+5)(x+1)=0}$.
Le théorème du produit nul montrer qu'il y deux solutions, $-\dfrac{5}{3}$ et -1.
L'ensemble des solutions est donc : $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{5}{3}\,;\,-1\right\}}$

III

1. Montrer que $(3x+7)^2-(2x-9)^2=a^2-b^2$ avec $\begin{cases} a=(3x+7) \\ b=(2x-9) \end{cases}$.

   Or $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Donc : $(3x+7)^2-(2x-9)^2=[(3x+7)-(2x-9)]\,[(3x+7)+(2x-9)]=(3x+7-2x+9)(3x+7+2x-9)=\boxed{(x+16)(5x-2)}$.

2. L'inéquation $(3x+7)^2-(2x-9)^2\geqslant 0$ est donc équivalente à :
   $(x+16)(5x-2)\geqslant 0$.

   - Signe de $x+16$:
     $x+16=0 \Leftrightarrow x=-16$ et $x+16>0 \Leftrightarrow x>-16$.
   - Signe de $5x-2$:
     $5x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{5}$ et $5x-2>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{2}{5}$
   - Tableau de signes :

x	$-\infty$		-16		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
Signe de $x+16$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $5x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $(x+16)(5x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   L'ensemble des solutions est : $\boxed{\mathscr{S}=]-\infty\,;\,-16]\cup\left[\dfrac{2}{5}\,;\,+\infty\right[}$

IV

1. $\dfrac{x-2}{-4x+3}+2=\dfrac{x-2+2(-4x+3)}{-4x+3}=\dfrac{x-2-8x+6}{-4x+3}=\boxed{\dfrac{-7x+4}{-4x+3}}$

2. $\dfrac{x-2}{-4x+3}\geqslant -2 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{-4x+3}/2\leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-7x+4}{-4x+3}\leqslant 0$.
   On cherche le signe de chaque facteur et on renseigne un tableau de signes.

   - Ensemble de définition : $-4x+3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{4}$ donc $\dfrac{3}{4}$ est la valeur interdite, donc l'ensemble de définition est $\boxed{\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{4}\right\}}$
   - $x\longmapsto -4x+3$ est décroissante puisque son coefficient directeur est -4, nombre négatif, donc $-4x+3$ est positif pour $x<\dfrac{3}{4}$ puis négatif pour $x>\dfrac{3}{4}$
   - $x-2=0$ pour $x=2$ et $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$
   - Tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{4}{7}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$-7x+4$		$+$	0	$-$	||	$-$	
$-4x+3$		$+$	|	$-$	||	$-$	
$\frac{-7x+4}{-4x+3}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

   L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S}=\left]-\infty\,;\,\dfrac{4}{7}\right]\cup\left]\dfrac{3}{4}\,;\,+\infty\right[}$.

V

Soit l'expression $f(x)=(3x-1)^2-4x(3x-1)$.

1. $f(x)=(3x)^2-2\times 3x\times 1+1^2-12x^2+4x=9x^2-6x+1-12x^2+4x=\boxed{3x^2-2x+1}$. (forme développée)

2. $f(x)=f(x)=(3x-1)^2-4x(3x-1)=\mathbf{(3x-1)}(3x-1)-4x\mathbf{(3x-1)}=(3x-1)\left[(3x-1)-4x\right]=\boxed{(3x-1)(-x-1)}$ (forme factorisée)

3. $f(x)=0\Leftrightarrow(3x-1)(-x-1)=0$.
   D'après le théorème du produit nul, les solutions sont -1 et $\dfrac{1}{3}$.
   $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-1\ ;\ \dfrac{1}{3}\right\}}$.

4. - $\boxed{f(0)=1}$ (en remplaçant x âr 0 dans la forme développée).
   - $f\left(\sqrt{2}\right)=3\times\sqrt{2}^2-2\sqrt{2}+1=3\times 2-2\sqrt{2}+1=\boxed{7-2\sqrt{2}}$ (en utilisant la forme développée)
   - $\boxed{f\left(\dfrac{1}{3}\right)=0}$ puisque $\dfrac{1}{3}$ est une des solutions de l'équation $f(x)=0$.