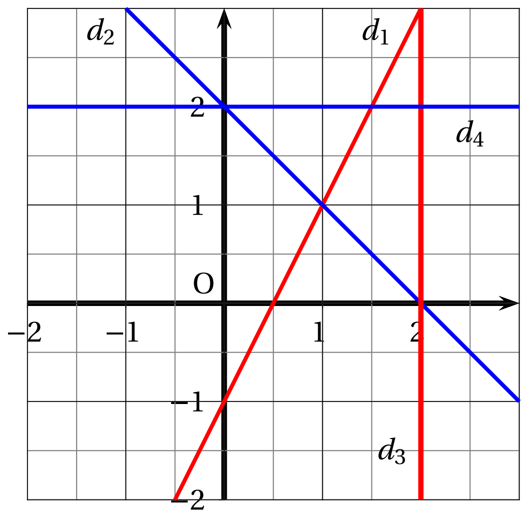
Correction du TD du 16 janvier sur les fonctions affines

I

Voici quatre droites tracées dans un repère orthonormal.
Associer à chacune de ces droites, lorsque cela est possible, la fonction affine qu'elle représente parmi la liste des fonctions ci-dessous.



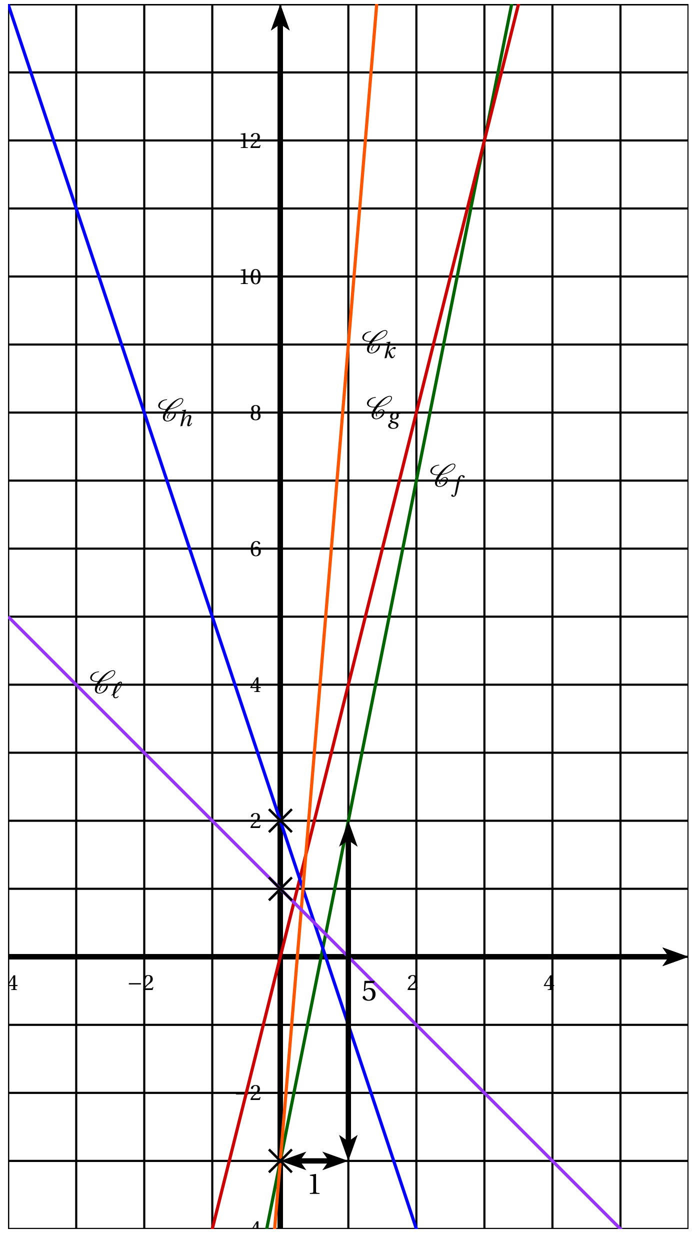
- d_1 passe par les points de cordonnées $(0\,;\,-1)$ et $(1\,;\,1)$; l'ordonnée à l'origine est donc $b=-1$ et le coefficient directeur vaut $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2}{1}=2$.
  d_1 est donc la représentation graphique de la fonction $f_5 : x \longmapsto 2x-1$
- d_2 passe par les points de cordonnées $(0\,;\,2)$ et $(2\,;\,0)$; l'ordonnée à l'origine est donc $b=2$ et le coefficient directeur vaut $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-2}{2}=-1$.
  d_2 est donc la représentation graphique de la fonction $f_3 : x \longmapsto -x+2$
- d_3 est parallèle à l' axe des ordonnées et n'est donc pas la représentation graphique d'une fonction (sinon, un nombre aurait plusieurs images, ce qui est impossible pour une fonction !)
- d_4 est parallèle à l'axe des abscisses et correspond dont à une fonction affine constante
  d_4 est donc la représentation graphique de la fonction $f_2 : x \longmapsto 2$

II

Représenter graphiquement les fonctions définies ci-dessous, puis donner leur sens de variation :

- $f(x)=5x-3$; le coefficient directeur est $5>0$ donc f est croissante.
- $g(x)=4x$; le coefficient directeur est $4>0$ donc g est croissante.
- $h(x)=2-3x$; le coefficient directeur est $-3<0$ donc h est décroissante.
- $k(x)=12x-3$; le coefficient directeur est $12>0$ donc k est croissante.
- $\ell(x)=-x+1$; le coefficient directeur est $-1<0$ donc ℓ est décroissante.

Pour tracer les droites correspondantes, on place les points d'abscisse 0 et d'ordonnée les ordonnées à l'origine et on utilise les coefficients directeurs.



Remarque : on peut aussi calculer les coordonnées de deux points pour chacune des droites.

III

Soit f une fonction affine telle que $f(2)=5$ et $f(5)=7$. Calculer $f(10)$ et $f(-3)$.

On peut utiliser la proportionnalité des accroissements (coefficient directeur fixe pour une même droite).

$\dfrac{f(5)-f(2)}{5-2}=\dfrac{f(10)-f(2)}{10-2}$

d'où : $\dfrac{7-5}{5-2}=\dfrac{f(10)-5}{10-2}$

d'où : $\dfrac{2}{3}=\dfrac{f(10)-5}{8}$ qui donne $f(10)-5=\dfrac{2}{3}\times 8=\dfrac{16}{3}$.

Alors : $f(10)=\dfrac{16}{3}+5=\dfrac{16+15}{3}=\dfrac{31}{3}$.

De même :

$\dfrac{f(5)-f(2)}{5-2}=\dfrac{f[-3]-f(2)}{-3-2}$

d'où : $\dfrac{7-5}{5-2} = \dfrac{f(-3)-5}{-3-2}$

d'où : $\dfrac{2}{3} = \dfrac{f(-3)-5}{-5}$ qui donne

$f(-3)-5 = \dfrac{2}{3} \times (-5) = -\dfrac{10}{3}$.

Alors : $f(-3) = -\dfrac{10}{3} + 5 = \dfrac{-10+15}{3} = \dfrac{5}{3}$.

Autre méthode.

On commence par déterminer l'expression de la fonction affine f puis on calcule les images demandées.

Le coefficient directeur est $a = \dfrac{f(5)-f(2)}{5-2} = \dfrac{2}{3}$.

On en déduit que $f(x) = \dfrac{2}{3}x + b$.

Calcul de b :

$f(2) = 5$ donc $\dfrac{2}{3} \times 2 + b = 5$ soit $\dfrac{4}{3} + b = 5$ d'où

$b = 5 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{15-4}{3} = \dfrac{11}{3}$.

Par conséquent : $\boxed{f(x) = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{11}{3}}$.

On retrouve $\boxed{f(10) = \dfrac{31}{3}}$ et $\boxed{f(-3) = \dfrac{5}{3}}$