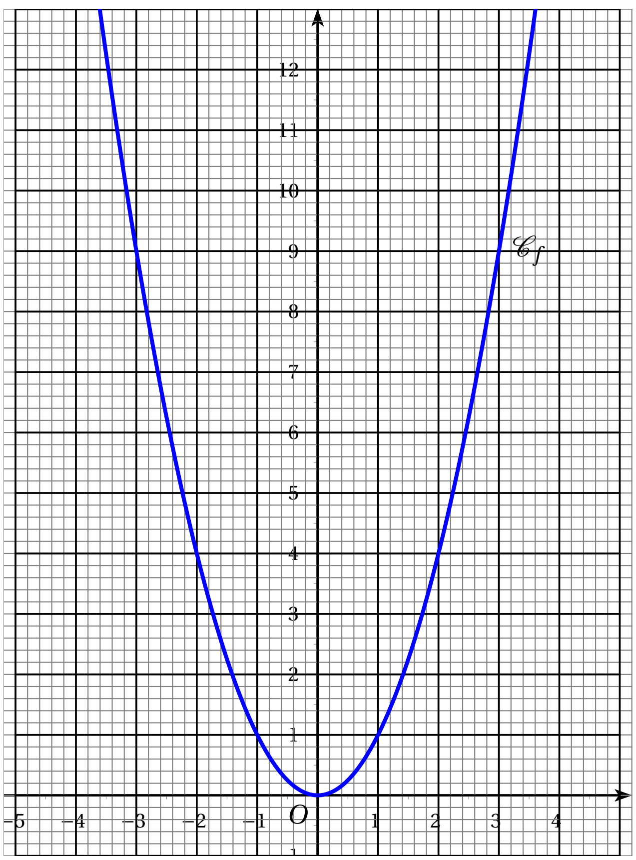
TD sur le second degré

I

On considère les deux fonctions $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto -2x+5$.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives.
On veut trouver graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction carré f.

1. 

   Sur le même graphique, représenter $\mathscr{C}_g$

2. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ et leurs valeurs approchées

3. Soient $a = -1-\sqrt{6}$ et $b = -1+\sqrt{6}$.
   Vérifier que a et b sont solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

II Forme canonique de $\mathbf{ax^2+bx+c}$

En mathématiques, canonique qualifie des objets qui semblent être naturels et instinctifs et qui permettent de faciliter des manipulations ultérieures. (source wikipedia)

On considère l'expression $f(x) = ax^2+bx+c$, où a, b et c sont trois nombres constants, $a \neq 0$; x est un nombre variable. Il s'agit de trouver une forme de $A(x)$, dite canonique, qui permet de trouver des résultats intéressants.
Pour cela, répondre aux question suivantes.

1. Montrer que $x^2+\dfrac{b}{a}x = \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2}$.
2. En déduire que $a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x\right) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a}$
3. Compléter les espaces vides :
   $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\dfrac{b}{\cdots}\right)+c$

   $= a\left(x+\dfrac{\cdots}{\cdots}\right)^2 - \cdots\cdots + c$

   $= a\left(x+\dfrac{\cdots}{\cdots}\right) - \dfrac{\cdots\cdots}{4a}$
4. En déduire que $ax^2+bx+c = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a}$.
5. En déduire que $\boxed{ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2+\beta}$, en montrant que $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et en donnant l'expression de β.
   L'expression $a(x-\alpha)^2+\beta$ est appelé **forme canonique** de $f(x) = ax^2+bx+c$.
   Le numérateur de β, b^2-4ac, joue un rôle important dans les équations et inéquations du second degré; on le nomme **discriminant** et est noté Δ (Delta majuscule)
6. Montrer que $\beta = f(\alpha)$.

III

Application : donner le forme canonique des expressions suivantes :

1. $f(x) = 2x^2+5x-7$
2. $g(x) = -3x^2-x+8$
3. En déduire que $f(x)$ a un maximum; donner sa valeur et indiquer pour quelle valeur il est atteint.
4. Que peut-on dire pour $g(x)$?