Signe d'une expression algébrique et inéquations

I Comparaison de deux nombres

Propriété

$a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

Pour comparer deux nombres (c'est-à-dire savoir lequel est le plus grand), on étudie le signe de la différence.

II Quelques règles sur les inégalités

II.1 Règle de l'addition et soustraction

Règle 1

Soient a, b et c trois réels alors :

- $a \leqslant b \Leftrightarrow a + c \leqslant b + c$
- $a \leqslant b \Leftrightarrow a - c \leqslant b - c$

Exemples :

- $2x + 4 \leqslant 0 \iff 2x + 4 \mathbf{-4} \leqslant 0 \mathbf{-4} \iff 2x \leqslant -4$
- $3x - 2 < -3 \iff 3x - 2 \mathbf{+2} < -3 \mathbf{+2} \iff 3x < -1$

II.2 Règles de la multiplication et division

Règle 2

Soient a, b deux réels et c un réel **positif** alors :

- $a \leqslant b \iff a \times c \leqslant b \times c$
- $a \leqslant b$ et $c \neq 0 \iff \dfrac{a}{c} \leqslant \dfrac{b}{c}$

Démonstration : puisque $a \leqslant b$: $b - a \geqslant 0$.
Pour comparer les deux nombres, on étudie le signe de leur différence :
Alors $bc - ac = c(b - a) \geqslant 0$ car $b - a \geqslant 0$ et $a \geqslant 0$, donc $\boxed{ac \leqslant bc}$.
De même : $\dfrac{b}{c} - \dfrac{a}{c} = \dfrac{b-a}{c} \geqslant 0$. Puisque $b - a \geqslant 0$ et $c \geqslant 0$ donc $\boxed{\dfrac{a}{c} \leqslant \dfrac{b}{c}}$.

Exemples :

- $2x > 7 \Leftrightarrow 2x \mathbf{\times 3} > 7 \mathbf{\times 3} \Leftrightarrow 6x > 21$
- $3x \leqslant 4 \Leftrightarrow \dfrac{3x}{4} \leqslant \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \boxed{x \leqslant \dfrac{4}{3}}$

- $x\sqrt{2} \geqslant 3 \Leftrightarrow \dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \geqslant \dfrac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Règle n° 3

Soient a, b deux réels et c un réel négatif ou nul alors :

- $a \leqslant b \iff a\times c \geqslant b\times c$ (Changement de sens de l'inégalité)
- et $a \leqslant b$ et $c<0 \iff \dfrac{a}{c} \geqslant \dfrac{b}{c}$ (Changement de sens de l'inégalité)

Même démonstration que dans le cas $c \geqslant 0$.

Exemples :

- $-x > 4 \iff -x\times(-1) < 4\times(-1) \iff x < -4$
- $-4x < -3 \iff \dfrac{-4x}{-4} > \dfrac{-3}{-4} \iff x > \dfrac{3}{4}$
- $-2x \geqslant 6 \iff \dfrac{-2x}{-2} \leqslant \dfrac{6}{-2} \iff x \leqslant -3$

III Les inéquations du premier degré à une inconnue

III.1 Méthode de résolution

- $x+a \leqslant b \Leftrightarrow x+a-a \leqslant b-a \Leftrightarrow x \leqslant b-a$
- $x-a \leqslant b \Leftrightarrow x-a+a \leqslant b+a \Leftrightarrow x \leqslant b+a$
- Si $a>0$: $ax \leqslant b \Leftrightarrow \dfrac{ax}{a} \leqslant \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{b}{a}$
- Si $a<0$: $ax \leqslant b \Leftrightarrow \dfrac{ax}{a} \geqslant \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{b}{a}$
- Si $a>0$: $\dfrac{x}{a} \leqslant b \Leftrightarrow \dfrac{x}{a}\times a \leqslant b\times a \Leftrightarrow x \leqslant ab$
- Si $a<0$: $\dfrac{x}{a} \leqslant b \Leftrightarrow \dfrac{x}{a}\times a \geqslant b\times a \Leftrightarrow x \geqslant ab$

III.2 Signe de $ax+b$

On considère la fonction affine $f = x \mapsto ax+b$.
Si $a>0$, la fonction est croissante et si $a<0$, a fonction est décroissante.
$ax+b=0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$.
On en déduit le signe de $ax+b$:

Cas a > 0 :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

Cas a < 0 :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

IV Signe d'un produit de binômes

On appelle binôme une expression du type $ax+b$ (ou polynôme du premier degré).

Propriété fondamentale

- Le produit de deux nombres de même signe est positif.
- Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif

Méthode :
Pour étudier le signe d'une produit de binômes :

- on étudie le signe de chacun d'entre eux,
- on récapitule tout cela dans un tableau de signes (une ligne par binôme)
- puis dans la dernière ligne, on trouve le signe du produit en appliquant la règle en appliquant la règle sur le signe d'un produit.

Exemple : étudions le signe de $A(x) = -x(2x-3)(x+6)(4-2x)$

- Cherchons les valeurs de x qui annulent chacun des quatre binômes de $A(x)$:
- $-x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $2x-3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ et $2x-3 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}$
- $x+6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$ et $x+6 > 0 \Leftrightarrow x > -6$
- $4-2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$ et $4-2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -4 \Leftrightarrow x < 2$ (en divisant par -2 qui est négatif, d'où le changement de sens de l'inégalité)
- Dressons maintenant le tableau des signes de $A(x)$:

x	$-\infty$		-6		0		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$2x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$4-2x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

- **Conclusion** :
  $A(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;\,-6[\cup \left]0\,;\,\dfrac{3}{2}\right[\cup]2\,;\,+\infty[$
  $A(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [-6\,;\,0[\cup \left]\dfrac{3}{2}\,;\,2\right[$

IV.1 Signe d'une expression rationnelle factorisée

Définition

Une expression rationnelle factorisée est une expression littérale de la forme :

$$\frac{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)\cdots(a_nx+b_n)}{(a'_1x+b'_1)(a'_2x+b'_2)(a'_3x+b'_3)\cdots(a'_nx+b'_n)}$$

avec a_1, $a_2 \ldots a_n$ et a'_1, $a'_2 \ldots a'_n$ non nuls.

⚠**Attention** : dans ce genre d'expressions, il y a des **valeurs interdites**.
Il faut donc commencer par chercher ces valeurs interdites !
On fait alors un tableau de signes comme pour un produit.
Exemple :
Étudions le signe de $B(x) = \dfrac{2x(3x-6)}{(x-3)(1-x)}$

- Cherchons les valeurs de x qui annulent chacun des binômes de $B(x)$: $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  $3x-6=0 \Leftrightarrow x=2$ et $3x-6>0 \Leftrightarrow x>2$
  $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ et $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$
  $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$ et $1-x>0 \Leftrightarrow x<1$
  1 et 3 sont donc des valeurs interdites.
- Dressons maintenant le tableau des signes de $B(x)$:

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$	
$3x-6$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$x-3$		$-$		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$+$	
$1-x$		$+$		$+$	‖	$-$		$-$	‖	$-$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

- **Conclusion :**
  $B(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0\,;\,1[\cup]2\,;\,3[$

  $B(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;\,0[\cup]1\,;\,2[\cup]3\,;\,+\infty[$
  $B(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0\,;\,2\}$

V Pour s'entraîner sur le site euler de l'académie de Versailles

- Etude du signe d'un produit de facteurs du premier degré : cliquer ici
- Résolution d'inéquations de la forme P(x)>0, P(x)<0, … où P(x) est un produit de facteurs du premier degré : cliquer ici
- Résolution d'inéquations de la forme Q(x)>a, Q(x)<a, … où Q est une fonction rationnelle et a un nombre rationnel : cliquer ici