Fonctions affines

Table des matières

I Définition :

Définition

Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est affine s'il existe deux réels a et b tel que, pour tout x, $f(x) = ax + b$.
a s'appelle le coefficient directeur et b est l'ordonnée à l'origine.

Exemples :

- $f : x \mapsto 2x + 3$ est une fonction affine car $2x + 3 = ax + b$ avec $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$.
- $f : x \mapsto \dfrac{3x+5}{7}$ est une fonction affine car $\dfrac{3x+5}{7} = \dfrac{3}{7}x + \dfrac{5}{7} = ax + b$ avec $a = \dfrac{3}{7}$ et $b = \dfrac{5}{7}$.
- $f : x \mapsto 5x$ est une fonction affine car $5x = ax + b$ avec $\begin{cases} a = 5 \\ b = 0 \end{cases}$

  On dit alors que f est linéaire (fonction affine dont l'ordonnée à l'origine est égale à 0)
- $f : x \mapsto 8$ est une fonction affine car $5x = ax + b$ avec $\begin{cases} a = 5 \\ b = 0 \end{cases}$.

  Cette fonction est une fonction constante.
- $f : x \mapsto 3x^2 + 7$ n'est pas une fonction affine car il n'existe pas de nombres a et b constants tels que $ax + n = 3x^2 + 7$.

Remarque : l'ensemble de définition d'une fonction affine est $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
En effet, on peut calculer $ax + b$ pour tout x réel.

II Variations

Théorème

Soit f une fonction affine définie par : $f(x) = ax + b$.

- f est croissante si, et seulement si, $a > 0$.
- f est constante si, et seulement si, $a = 0$.
- f est décroissante si, et seulement si, $a < 0$.

Démonstration : Soient deux nombres quelconques x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$.
$f(x_2) - f(x_1) = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = ax_1 + -ax_2 - b = \boxed{a(x_2 - x_1)}$.
Comme $x_2 - x_1$ est positif, puisque, par hypothèse, $x_1 < x_2$, , $f(x_2) - f(x_1)$ est du signe de a.
Si $a > 0$, $x_1 < x_2$ entraîne que $f(x_1) < f(x_2)$, donc f **respecte l'ordre** et f est **croissante**.

Si $a = 0$, f est constante, car, pour tout x, $f(x) = 0x + b = b$.

Si $a > 0$, $x_1 < x_2$ entraîne que $f(x_1) > f(x_2)$, donc f **renverse l'ordre** et f est **décroissante**.

Remarque : Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine, avec $a \neq 0$. $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$. On en déduit les **tableaux de variations** possibles de f, selon le signe de a.

$\boxed{\text{Pour } a > 0}$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↗	

$\boxed{\text{Pour } a < 0}$:

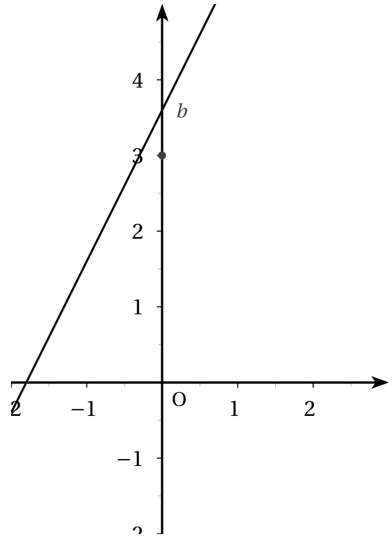
x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↘	

III Représentation graphique d'une fonction affine

Propriété (admise)

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine. La représentation graphique d'une fonction affine est une droite, sécante à l'axe des ordonnées. a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire que la droite passe par le point de coordonnées $(0\ ;\ b)$ (car $f(0) = b$)

Interprétation graphique de b :



Remarque : toute droite sécante à' l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

IV Caractérisation d'une fonction affine

Théorème

f est une fonction affine si, et seulement si, l'accroissement Δy de l'image est proportionnel à l'accroissement Δx de la variable. Autrement dit, x_1 et x_2 étant deux réels distincts, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$ où a est un nombre constant.

Démonstration : Si f est une fonction affine, $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$.

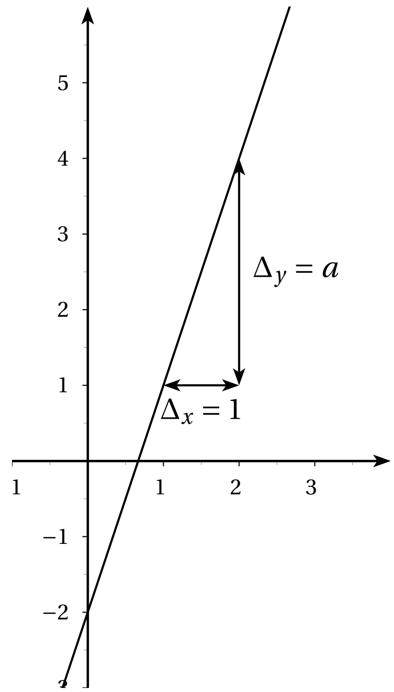
Réciproque : Soit f une fonction telle que, pour tous x_1 et x_2, $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$. Alors, en particulier, pour x et 0, on a : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = a$ d'où, en posant $f(0) = b$, $f(x) = ax + b$.

Application : on connaît les images de deux nombres par une fonction affine et l'on veut l'image d'un troisième nombre, sans trouver l'expression de la fonction affine :

x	2	4	7
$f(x)$	−1	5	

Puisque f est affine, on a : $\dfrac{f(4) - f(2)}{4-2} = \dfrac{f(7) - f(2)}{7-2}$ donc $\dfrac{5-(-1)}{4-2} = \dfrac{f(7) - (-1)}{7-2}$, soit $\dfrac{6}{2} = \dfrac{f(7)+1}{5}$. Par conséquent : $3 = \dfrac{f(7)+1}{5}$ donc $f(7) + 1 = 3 \times 5 = 15$ d'où $f(7) = 15 - 1 = 14$: $\boxed{f(7) = 14}$.

Interprétation graphique de a : $a = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ donc $\Delta_y = a\Delta_x$. Si l'on prend $\Delta_x = 1$, on a $\boxed{\Delta_y = a}$.
On en déduit que si l'on se déplace de 1 unité parallèlement à l'axe des abscisses, on se déplace en même temps de a parallèlement à l'axe des ordonnées.



Remarque : si l'on se déplace de k unités parallèlement à l'axe des abscisses, on se délace dans le même temps de ka unités parallèlement à l'axe des ordonnées.

On peut facilement visualiser l'influence des deux paramètres, coefficient directeur et ordonnée à l'origine, à l'aide d'un ordinateur. On peut par exemple voir les deux fichiers suivants qui montrent ce qui se passe quand on fait varier l'ordonnée à l'origine pour le prier, le coefficient directeur pour le second. (Il faut avoir Java sur son ordinateur).

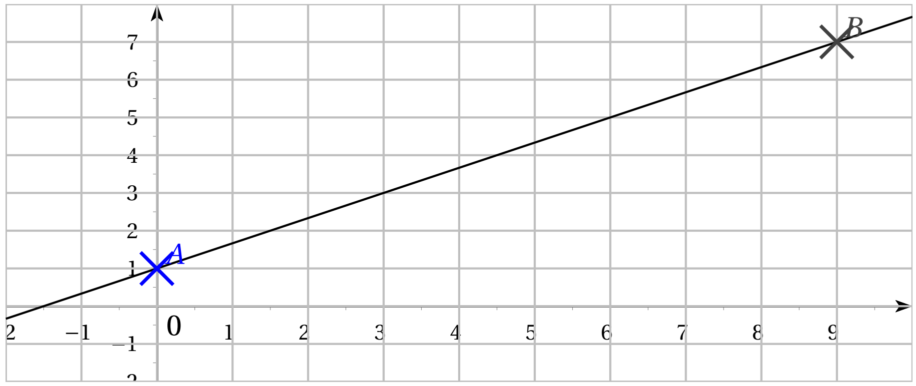
- cliquer sur variations de l'ordonnée à l'origine
- variations du coefficient directeur

V Comment tracer graphiquement la représentation graphique d'une fonction affine ?

V.1 À partir de deux points :

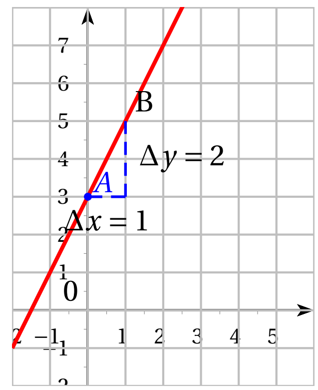
Exemple : on veut représenter graphiquement la fonction affine $f : x \mapsto \frac{2}{3}x + 1$. On sait que la représentation graphique de f est une droite. Pour tracer une droite, il suffit de connaître deux points de celle-ci. On calcule alors les coordonnées de deux points de cette droite, en esssayant d'avoir des coordonnées entières, pour qu'elles soient faciles à placer. L'ordonnée à l'origine vaut 1, donc la droite passe par le point de coordonnées (0 ; 1). On remarque qu'il suffit de prendre x multiple de 3 (x pas trop proche de 0, pour accroître la précision du tracé.) On remplit un tableau :

x	0	9
$y = \frac{2}{3}x + 1$	1	$\frac{2}{3} \times 9 + 1 = 7$

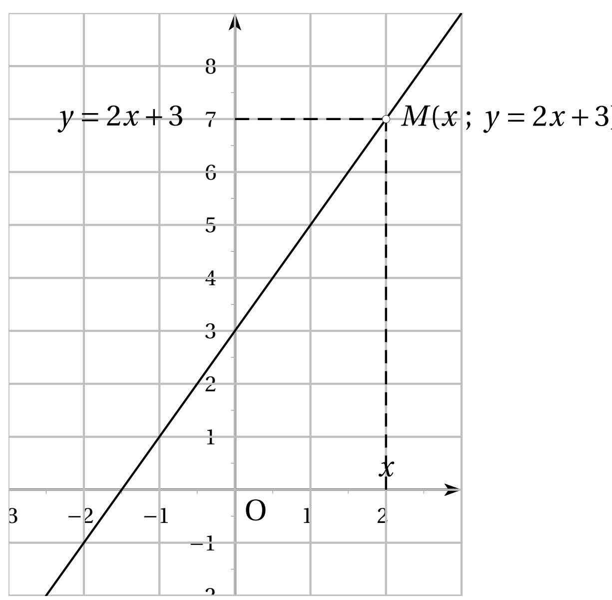


V.2 En utilisant le coefficient directeur

Exemple : représenter graphiquement la fonction affine $x \mapsto 2x+3$. L'ordonnée à l'origine est 3, donc la droite passe par le point A de coordonnées $(0\ ;\ 3)$. Le coefficient directeur est 2, donc $2 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, c'est-à-dire $\Delta y = 2\Delta x$. On choisit par exemple $\Delta x = 1$; on obtient alors $\Delta y = 2 \times 1 = 2$. En partant de A, on se déplace de 1 en abscisses, et alors de 2 en ordonnées.



Remarque : La représentation graphique d'une fonction affine $f \mapsto ax+b$ est une droite (sécante à l'axe de l'axe des ordonnées (Oy)) ; on dit que cette droite a pour **équation réduite** $\boxed{y = ax+b}$.
Exemple : La droite d'équation $y = 2x+3$ est la représentation graphique de la fonction $f \mapsto 2x+3$.



Exemple : Trouver l'équation de la droite passant par les points A$(2\ ;\ 5)$ et B$(7\ ;\ -1)$. C'est la même chose que de chercher la fonction affine f vérifiant $f(2) = 5$ et $f(7) = -1$. Notons m le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine. $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-1-5}{7-2}=-\dfrac{6}{5}$. L'équation de la droite est alors $y=-\dfrac{6}{5}x+p$. A appartient à la droite (AB) donc ses coordonnées vérifient cette équation : $y_A=-\dfrac{6}{5}x_A+p$ donc $5=-\dfrac{6}{5}\times 2+p$. D'où $-\dfrac{12}{5}+p=5$ et $p=5+\dfrac{12}{5}=\dfrac{25+12}{5}=\dfrac{37}{5}$. L'équation de la droite (AB) est $\boxed{y=-\dfrac{6}{5}x+\dfrac{37}{5}}$.

VI Signe d'une fonction affine

D'après les tableaux de variation d'une fonction affine, on en déduit les tableaux de signes suivants :

Cas : $a>0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)=ax+b$		$-$	0	$+$	

Cas : $a<0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)=ax+b$		$+$	0	$-$	