Fonctions carré et fonction inverse

Table des matières

I Fonction carré

I.1 Définition

Définition

On appelle fonction carré la fonction $x \mapsto x^2$

Propriété

La fonction carré $x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$.

En effet, on peut calculer x^2 pour n'importe quelle valeur de $x \in \mathbb{R}$.

I.2 Parité

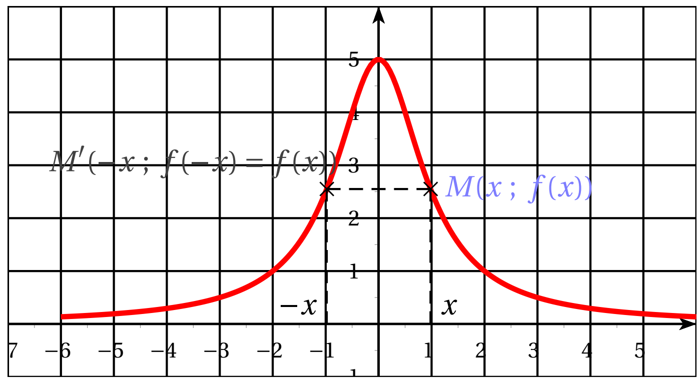
Définition

Une fonction f définie sur un ensemble I est paire si :

- I est symétrique par rapport à l'origine O du repère (donc, pour tout $x \in I$, $-x \in I$).
- pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$

Illustration graphique :

Conséquence graphique : la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Propriété

La fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est paire

Démonstration

- f est définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à O.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

I.3 Variations

Propriété

$f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Démonstration :

- Sur $[0\ ;\ +\infty[$: soient deux réels x_1 et x_2 quelconques de $[0\ ;\ +\infty[$ avec $0 \leqslant x_1 < x_2$.
  Il s'agit de comparer les nombres $f(x_1) = x_1^2$ et $f(x_2) = x_2^2$.
  $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = \underbrace{(x_2 + x_1)}_{\geqslant 0} \times \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geqslant 0$ donc $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

  En effet, $x_2 + x_1 \geqslant 0$ comme somme de nombres positifs et $x_2 - x_1 > 0$ car on a supposé $x_1 < x_2$.
  Les images sont classées dans le même ordre que les antécédents, donc f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

- Sur $]-\infty\,;\,0]$: soient deux réels x_1 et x_2 quelconques de $]-\infty\,;\,0]$ avec $x_1 < x_2 \leqslant 0$.
  On a le même calcul : $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 + x_1)}_{\leqslant 0} \times \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \leqslant 0$ $(x_1 + x_2 \leqslant 0)$ car les deux nombres sont négatifs.

  Les images cette fois sont classées dans l'ordre inverse des antécédents : la fonction est décroissante.

  Remarque : sur $]-\infty\,;\,0]$, on aurait pu utiliser la parité de la fonction et la symétrie de la courbe par rapport l'axe des ordonnées.

Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

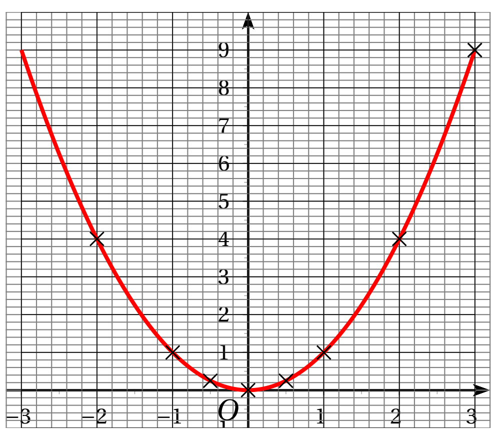
I.4 Courbe représentative

Pour tracer la courbe, on calcule des coordonnées de points (il en faut plus que deux, puisque la courbe n'est pas une droite). Comme la courbe est symétrique, on se limite à des points dont les abscisses sont des valeurs positives et on construit ensuite les points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

En général, on prend ces cinq valeurs positives :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x) = x^2$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

La courbe représentative de la fonction carré est appelée **parabole**.



I.5 Application

Exercice : comparer les carrés des nombres suivants :

a) $0,2^2$ et $0,21^2$

b) $(-2,4)^2$ et $(-2,41)^2$

c) $(-3,1)^2$ et $4,2$

Solution :

a) 0,2 et 0,21 sont positifs; sur $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction $f : x \mapsto x^2$ est croissante.

$0,2 < 0,21$ donc $f(0,2) < f(0,21)$ donc $\boxed{0,2^2 < 0,21^2}$

b) -2,4 et -2,41 sont négatifs; sur $]-\infty\ ;\ 0]$, f est décroissante.

$-2,4 > -2,41$; comme f est décroissante, f renverse l'ordre, donc $\boxed{(-2,4)^2 < -2,41^2}$.

c) $(-3,1)^2 = 3,1^2$ donc il suffit de comparer $3,1^2$ et $4,2^2$.

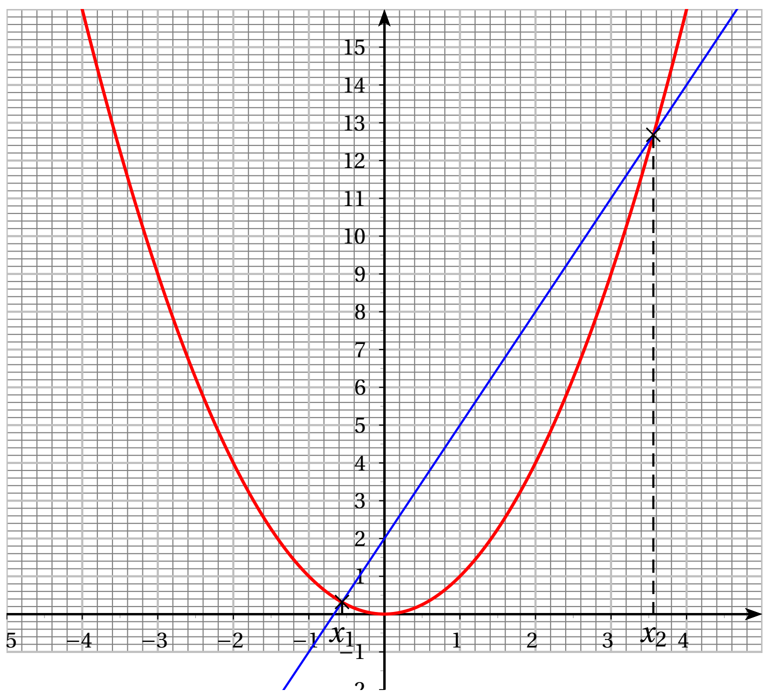
3,1 et 4,2 sont positifs et $3,1 < 4,2$; sur $[0\ ;\ +\infty[$, f est croissante, donc $3,1^2 < 4,2^2$, d'où $\boxed{(-3,1)^2 < 4,2^2}$

Exercice : résoudre graphiquement l'équation $x^2 = 3x + 2$.

On pose $f(x) = x^2$ et $g(x) = 3x + 2$.

On trace les courbes représentatives de ces fonctions. Les solutions éventuelles de cette équation sont les abscisses des points d'intersubsection de ces deux courbes.

Puisqu'il s'agit d'une lecture graphique, les valeurs trouvées sont des valeurs approchées des solutions. la méthode pour trouver les valeurs exactes sera vue en Première.



On trouve deux solutions : $x_1 \approx -0,5$ et $x_2 \approx 3,6$

II Fonction polynôme du second degré

II.1 Définitions

Définition

On appelle fonction **polynôme du second degré** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

o˘ a, b et c sont des réels appelés coefficients avec $a \neq 0$.

Exemples : Exemples de fonctions polynômes du second degré

fonctions polynôme de degré 2	coefficients
$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$	$a = 2,\ b = -5,\ c = 3$
$f(x) = -x^2 + 3$	$a = -1,\ b = 0,\ c = 3$
$f(x) = -7x^2 + 3x$	$a = -7,\ b = 3,\ c = 0$

Définition

L'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
Cette forme est appelée **forme canonique**

Démonstration :

$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x\right) + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\right] + c = a\left(x - \left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a} + c = \boxed{a(x-\alpha)+\beta}$ en posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$; on a alors $\beta == -\dfrac{b^2}{4a} + c = f(\alpha)$, car en remplaçant x par α dans $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, on trouve β.

Exemples :

1. Soit $P(x) = 2x^2 - 4x + 5 = ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -4$ et $c = 5$.
   On a $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2 \times 2} = 1$
   $\beta = P(\alpha) = P(1) = 3$
   Par conséquent $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = 2(x-1)^2 + 3$.
2. $P(x) = -5x^2 + 2x - 7 = ax^2 + bx + c$ avec $a = -5$, $b = 2$ et $c = -7$.
   $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2 \times (-5)} = \dfrac{1}{5}$
   $\beta = P(\alpha) = P\left(\dfrac{1}{5}\right) = -5 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 + 2 \times \dfrac{1}{5} - 7 = -\dfrac{34}{5}$.
   On en déduit $P(x) = -5\left(x - \dfrac{1}{5}\right)^2 - \dfrac{34}{5}$

II.2 Variations et représentation graphique

Propriété

La fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ est :

- strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ \alpha]$ puis strictement croissante sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$ **si** $a > 0$,
- strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ \alpha]$puis strictement décroissante $[\alpha\ ;\ +\infty[$ **si** $a < 0$,

Démonstration dans le cas $a > 0$: Sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$:

On prend deux nombres x_1 et x_2 avec $\alpha \leqslant x_1 \leqslant x_2$.

$\alpha \leqslant x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow 0 \leqslant x_1 - \alpha \leqslant x_2 - \alpha \Rightarrow 0 \leqslant (x_1 - \alpha)^2 \leqslant (x_2 - \alpha)^2$ (car la fonction carré est croisante sur $[0\ ;\ +\infty[$)

On en déduit $0 \leqslant 0 \leqslant a(x_1 - \alpha)^2 \leqslant a(x_2 - \alpha)^2$ puis $\beta \leqslant a(x_1 - \alpha)^2 + \beta \leqslant a(x_2 - \alpha)^2 \beta$.

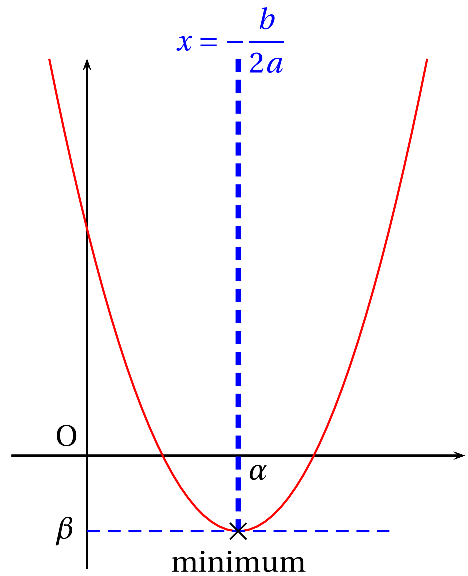
Les images sont classées sdan sel même ordre que les antécédents, donc la fonction f est croissante sur $[\alpha + \infty[$.

Démonstration analogue sur $]-\infty\ ;\ \alpha]$ et dans le cas où $a < 0$

Tableau de variations et représentation graphique :

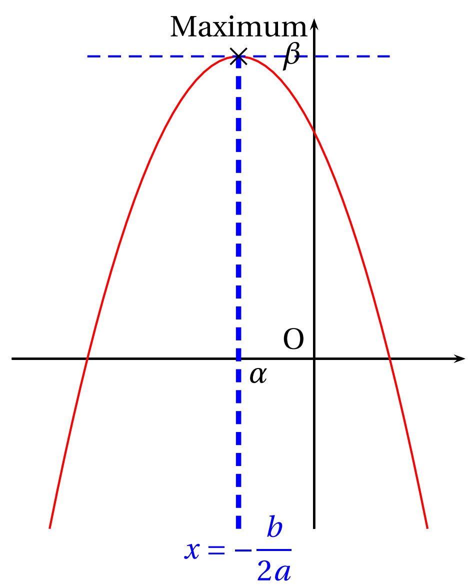
$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$



$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$



Dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$, la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole**
Cette parabole admet un **axe de symétrie** parallèle à l'axe des ordonnées.

Remarque : pour calculer $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, on effectue plusieurs transformations successives :
$x \mapsto (x-\alpha)^2 \mapsto a(x-\alpha)^2 \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$.
La première transformation correspond à une translation parallèlement à l'axe des abscisses de α unités ; la deuxième, multiplication par a, correspond à une dilatation (et un renversement si $a < 0$) et la troisième à une translation parallèlement à l'axe des ordonnées de β unités.

III Fonction inverse

III.1 Définition

Définition

On appelle fonction inverse la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Propriété

La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$.

III.2 Parité

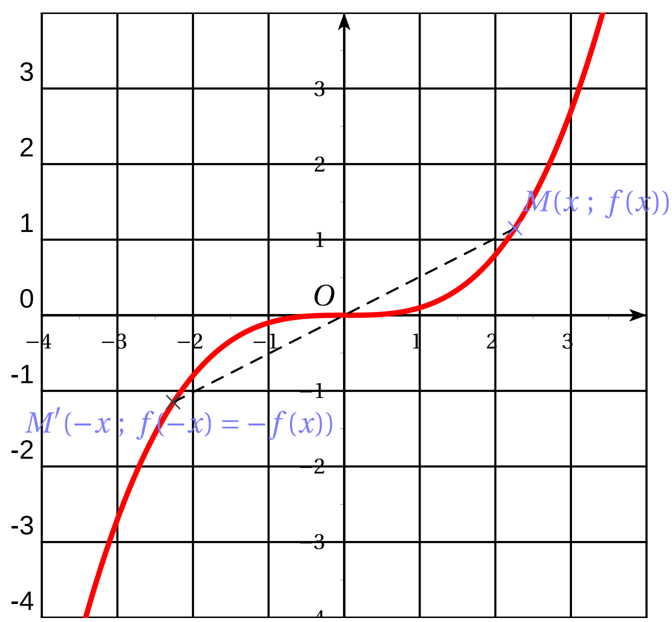
Définition

Une fonction f définie sur un ensemble I est impaire si :

- I est symétrique par rapport à l'origine O du repère (donc, pour tout $x \in I$, $-x \in I$).
- pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$

Conséquence graphique : la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Courbe représentative d'une fonction. impaire :



Propriété

La fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est impaire

Démonstration

- f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à O.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$

III.3 Variations

Propriété

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

⚠ : attention, on ne peut parler de variation que sur un intervalle ; il est faux de dire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^*$: par exemple : $-2 < 2$; $f(-2) = -\dfrac{1}{2}$, $f(2) = \dfrac{1}{2}$ donc $f(-2) < (2)$

Démonstration :

- Sur $[0\,;\,+\infty[$: soient deux réels x_1 et x_2 quelconques de $]0\,;\,+\infty[$ avec $0 \leqslant x_1 < x_2$.
  Il s'agit de comparer les nombres $f(x_1) = \dfrac{1}{x_1}$ et $f(x_2) = \dfrac{1}{x_2}$.
  $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$.
  $x_1 - x_2 < 0$ car $x_1 < x_2$; $x_1 x_2 > 0$ comme produit de nombres positifs. Les images sont classées dans l'ordre inverse des antécédents, donc f est **décroissante** sur $]0\,;\,+\infty[$.

- Sur $]-\infty\,;\,0[$: soient deux réels x_1 et x_2 quelconques de $]-\infty\,;\,0[$ avec $\leqslant x_1 < x_2 < 0$.
  On a le mÍme calcul : $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$.
  $x_1 - x_2 < 0$ car $x_1 < x_2$; $x_1 x_2 > 0$ comme produit de nombres négatifs. Les images sont classées dans l'ordre inverse des antécédents, donc f est **décroissante** sur $]-\infty\,;\,0[$.

  Remarque : sur $]-\infty\,;\,0]$, on aurait pu utiliser la symétrie de la courbe par rapport à O.

Tableau de variation :

0 est une valeur interdite, donc il faut mettre une double-barre en dessous de 0.

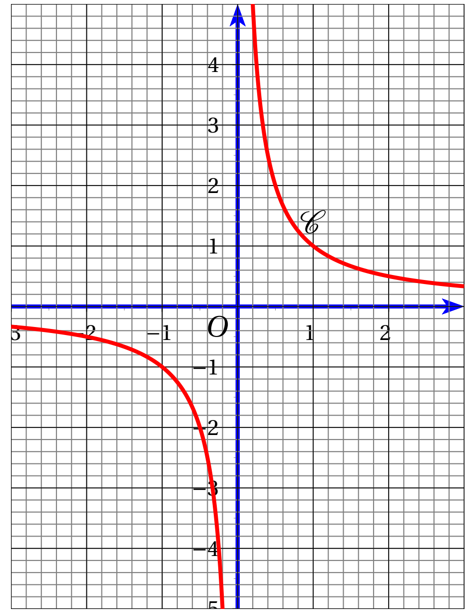
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

III.4 Courbe représentative

Pour tracer la courbe, on trace la partie correspondant à des abscisses positives en calculant les coordonnées de quelques points.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x) = \frac{1}{x}$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

La courbe représentative de la fonction inverse est appelée **hyperbole**. Elle est constituée de deux branches (symétriques par rapport à l'origine O).



III.5 Application

Exercice : comparer les nombres suivants :

a) $\dfrac{1}{0,2}$ et $\dfrac{1}{0,3}$

b) $-\dfrac{1}{2,4}$ et $-\dfrac{1}{2,5}$

c) $-\dfrac{1}{3,1}$ et $\dfrac{1}{4,2}$

Solution :

a) 0,2 et 0,3 sont positifs; sur $]0\,;\,+\infty[$, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante.

$0,2 < 0,3$ donc $f(0,2) > f(0,3)$ donc $\boxed{\dfrac{1}{0,2} > \dfrac{1}{0,3}}$

b) -2,4 et -2,5 sont négatifs; sur $]-\infty\,;\,0[$, f est décroissante.

$-2,4 > -2,5$; comme f est décroissante, f renverse l'ordre, donc $\boxed{(-\dfrac{1}{2,4}) < -\dfrac{1}{2,5}}$.

c) $-3,1 < 0$ et $4,2 > 0$ donc $-\dfrac{1}{3,1} < 0$ et $\dfrac{1}{4,2} > 0$ donc $\boxed{-\dfrac{1}{3,1} < \dfrac{1}{4,2}}$.

Remarque : ici, on ne pouvait pas utiliser les variations de la fonction inverse, car les nombres -3,1 et 4,2 ne sont par dans les mêmes intervalles définition de la fonction inverse.

IV Fonctions homographiques

IV.1 Définition

Définition

On appelle fonction homographique toute fonction de la forme $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c et d sont des réels avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

Propriété

L'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

Exemple : soit $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{7x+3}$.

f est bien homographique et l'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{7}\right\}$.

IV.2 Courbe représentative

Définition

La courbe représentative d'une fonction homographique est une hyperbole, constituée de deux branches.

Pour la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{7x+3}$, la courbe représentative est :