Correction du contrôle commun n° 2

Exercice 1 :

1. Soient $A(-1;4)$ et $B(-3;2)$ deux points du plan.

   Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3-(-1)=-2 \\ 2-4=-2 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}}$.

   L'affirmation est **fausse**

2. On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}+1 \end{pmatrix}$.

   On applique la condition de colinéarité : $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-2\times 1 = \sqrt{3}^2-1-2=3-1-2=0$.
   On en déduit que ces deux vecteurs ont des cordonnées proportionnelles, donc sont **colinéaires**; l'affirmation est **vraie**.

3. Soient $A(2~;~3)$, $B(1~;~4)$ et $M(-3~;~8)$ trois points du plan.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   Il est clair que $\boxed{\overrightarrow{AM}=5\overrightarrow{AB}}$ donc ces deux vecteurs sont colinéaires; les points A, B et M sont donc alignés.
   L'affirmation est **vraie**.

4. On considère les points $A(-2~;~-2)$, $B(2~;~4)$, $C(10~;~2)$ et $D(6~;~4)$.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$
   Ces deux vecteurs ne sont pas égaux (mêmes abscisses, mais ordonnées différentes), donc le quadrilatère $ABCD$ n'est **pas un parallélogramme**.

Exercice 2 :

1. Factorisons l'expression $(2x-3)(8x+1)-(7x+4)(2x-3)$.
   On remarque que $2x-3$ est un facteur commun.
   Alors : $(2x-3)(8x+1)-(7x+4)(2x-3) = (2x-3)\left[(8x+1)-(7x+4)\right] = (2x-3)(8x+1-7x-4) = \boxed{(2x-3)(x-3)}$.

2. (a) Dressons ci-dessous le tableau de signe de $(-5x-8)(7x-)$.

   - $-5x-8=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{8}{5}$ et $-5x-8>0 \Leftrightarrow -5x ><8 \Leftrightarrow x<-\dfrac{8}{5}$ (en divisant par -5, nombre négatif).
   - $7x-6=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{6}{7}$ et $7x-6>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{6}{7}$.

   Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{8}{5}$		$\frac{6}{7}$		$+\infty$
$-5x-8$		+	0	−		−	
$7x-6$		−		−	0	+	
$(-5x-8)(7x-6)$		−	0	+	0	−	

   (b) Factorisons $(x-7)^2-(6x+1)^2$.
   On reconnaît une différence de deux carrés, donc une identité remarquable du type $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ avec $\begin{cases} a=(x-7) \\ b=(6x+1) \end{cases}$.
   On en déduit $(x-7)^2-(6x+1)^2 = \left[(x-7)+(6x+1)\right]\left[(x-7)-(6x+1)\right] = \boxed{(7x-6)(-5x-8)}$

   (c) $(x-7)^2 \leqslant (6x+1)^2 \Leftrightarrow (x-7)^2-(6x+1)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow (7x-6)(-5x-8) \leqslant 0$ (après la factorisation précédente 2. b.)

   D'après le tableau de signes (2.a.), l'ensemble des solutions est : $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty~;~-\frac{8}{5}\right] \cup \left[\frac{6}{7}~;~+\infty\right[}$ 1 pt

Exercice 3 :

Un quotidien d'information s'est intéressé aux tranches d'âge de ses abonnés. Ce quotidien est disponible en ligne ou en version papier. On a obtenu les résultats suivants et on complète le tableau avec les totaux :

	Moins de 20 ans	Entre 20 et 40 ans	Plus de 40 ans	Total
Version papier	183	318	162	663
Version en ligne	96	175	66	337
Total	279	493	228	1 000

1. Au total, 1000 abonnements ont été souscrits à ce journal.
2. On choisit au hasard l'un des abonnements souscrits. On considère les évènements suivants :
   - L : « L'abonnement souscrit est un abonnement en ligne ».
   - A : « L'abonnement a été souscrit par une personne de plus de 40 ans ».
   - B : « L'abonnement a été souscrit par une personne de moins de 20 ans ».

   (a) La probabilité de l'évènement L est $\boxed{p(L) = \dfrac{337}{1000}}$

   (b) $L \cap A$ est l'événement « L'abonnement a été souscrit en ligne **et** souscrit par une personne de plus de 40 ans ».
   $p(L \cap A) = \dfrac{66}{1\,000} = \boxed{\dfrac{33}{500}}$

   (c) L'évènement $L \cup B$ est l'événement « L'abonnement a été souscrit en ligne **ou** souscrit par une personne de moins de 20 ans ».
   $p(L \cup B) = p(L) + p(B) - p(L \cap B) = \dfrac{337 + 279 - 96}{1\,000} = \dfrac{520}{1000} = \dfrac{13}{25}$; $\boxed{p(L \cup B) = \dfrac{13}{25}}$

3. La probabilité que l'abonnement ait été souscrit par une personne âgée entre 20 et 40 ans sachant qu c'est un abonnement papier est $\dfrac{318}{663} = \boxed{\dfrac{106}{221}}$

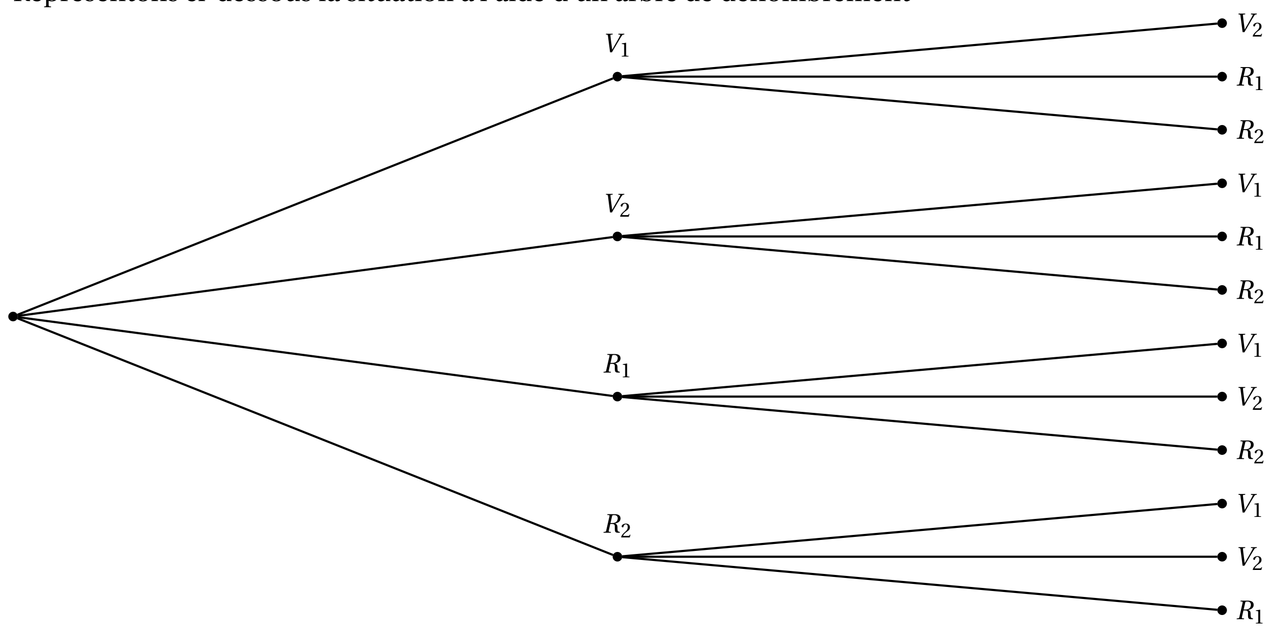
Exercice 4 :

Une urne contient deux boules vertes numérotées 1 et 2, que l'on note V_1 et V_2, et deux boules rouges numérotées 1 et 2, que l'on note R_1 et R_2. Les boules sont indiscernables au toucher.

On tire une boule de l'urne puis, **sans la remettre**, on en tire une deuxième.

Une issue est donc un couple que l'on notera $(V_1 ; R_1)$, par exemple.

1. Représentons ci-dessous la situation à l'aide d'un arbre de dénombrement



Le nombre total d'issues est 12. Il y a 12 couples possibles.

2. Calculons la probabilité des évènements suivants :
   Nous sommes en situation d'équiprobabilité; la probabilité d'un événement est le nombre de couples réalisant cet événement divisé par le nombre total de couples possibles.

   (a) p(« La boule V_1 a été tirée ») $= \dfrac{6}{12} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$ (6 branches contiennent V_1).

   (b) p(« Lors du tirage, le numéro 2 apparaît exactement une fois ») $= \dfrac{10}{12} = \boxed{\dfrac{5}{6}}$.

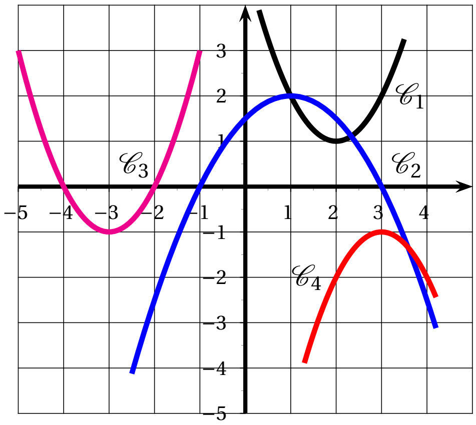
   (c) p (« Les des boules tirées sont de couleurs différentes. ») $= \dfrac{8}{12} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

Exercice 5

On considère les quatre fonctions définies par :

$f_1(x) = (x-2)^2+1$, $f_2(x) = -\dfrac{1}{2}(x-1)^2+2$, $f_3(x) = (x+3)^2-1$ et $f_4(x) = -(x-3)^2-1$.

On a tracé ci-dessous les quatre courbes représentatives.



- $f_1(x) = a_1(x-\alpha_1)^2+\beta_1$; $a_1 > 0$ donc la parabole associée est tournée vers le haut et a pour sommet $S_1(\alpha_1\ ;\ \beta_1)$ donc $S_1(2\ ;\ 1)$.
- $f_2(x) = a_2(x-\alpha_2)^2+\beta_2$ avec $a_2 = -\dfrac{1}{2} < 0$ donc la parabole associée est trouvée vers le bas; le sommet est $S_2(1\ ;\ 2)$
- $f_3(x) = (x+3)^2-1$; le coefficient de x^2 est 1, positif, donc la parabole est tournée vers le haut; le sommet est $S_3(-3\ ;\ -1)$.
- $f_4(x) = -(x-3)^2-1$; le coefficient de x^2 est -1, négatif, donc la parabole est tournée vers le bas; le sommet est $S_4(3\ ;\ 1)$.

  On a mis les noms des courbes sur le graphique.

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2-2x-3$.

1. $(x-3)(x+1) = x^2+x-3x-3 = x^2-2x-3 = f(x)$ donc $\boxed{f(x) = (x-3)(x+1)}$

2. $f(x) = x^2-2x-3 = ax^2+bx+c$ avec $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$.

   La forme canonique de $f(x)$ est $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

   Alors $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$

   $\beta = f(\alpha) = f(1) = -4$ d'où $\boxed{f(x) = (x-1)^2-4}$

3. En utilisant la forme la plus adaptée de $f(x)$, répondre aux questions suivantes :

   (a) • $\boxed{f(0) = -3}$ en utilisant la forme initiale (développée)

   • $f(-1) = (-1-3)(-1+1) = -4 \times 0 = 0$ donc $\boxed{f(-1) = 0}$ (en prenant la forme factorisée)

   • $f(x) = (x-1)^2 - 4$ donc $\boxed{f(1) = -4}$

   (b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0$

   Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

   • Premier cas : $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

   • Deuxième cas : $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

   L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S} = \{-1\ ;\ 3\}}$

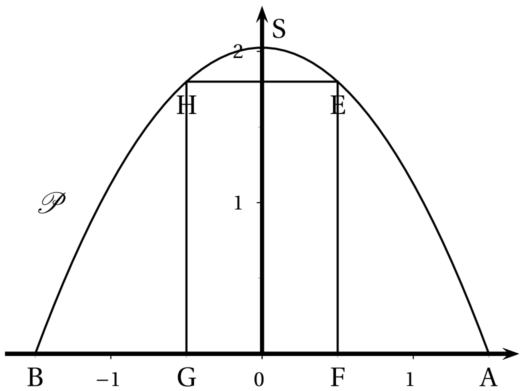
   (c) On a $f(x) = (x-1)^2 - 4$; le coefficient de x^2 est $a = 1 > 0$ donc la fonction est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 1]$ puis croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

   Tableau de variation :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

Exercice 7

John veut construire une serre dans son jardin. Le contour de la façade est assimilé à la parabole $\mathscr{P}$ représentée dans le repère orthonormé ci-dessous (unité : 1 m) :



Le rectangle $EFGH$ représente la porte. $OS = 2,025$ m et $OA = OB = 1,5$ m.

1. $\mathscr{P}$ est la courbe représentative d'une fonction définie par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, où $(\alpha\ ;\ \beta)$ sont les cordonnées du sommet.

   Le sommet S a pour cordonnées $(0\ ;\ 2,025)$ donc $\alpha = 0$ et $\beta = 2,025$.

   donc $f(x) = ax^2 + 2,025$.

   $OA = 1,5$ donc $f(1,5) = 0$ qui donne $a \times 1,5^2 = 2,025 \Leftrightarrow 2,25a + 2,025 = 0 \Leftrightarrow a = -\dfrac{2,025}{2,25} = -0,9$.

   On en déduit que $\boxed{f(x) = -0,9x^2 + 2,025}$.

2. La largeur de la porte est $GF = 1,5$ m donc $OF = 0,75$.

   La hauteur de la porte est alors $f(0,75) = 1,51875$ donc la hauteur de la porte vaut environ 1,52 m.

3. On cherche la valeur de x telle que $f(x) = 1,8$.

   $f(x) = 1,8 \Leftrightarrow -0,9x^2 + 2,025 = 1,8 \Leftrightarrow -0,9x^2 = -0,225 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{-0,225}{0,9} = 0,25$.

   Cette équation a deux solutions, -0,5 et 0,5.

   On a donc $x = 0,5$ et la largeur de la porte vaut alors 1 m; John ne pourra alors pas passer avec sa brouette.