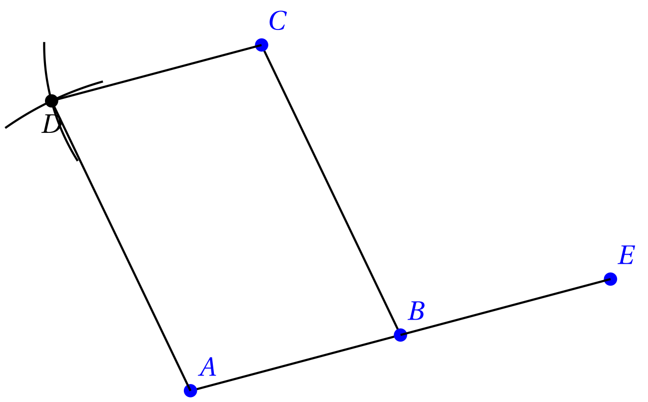
2^{nde} : correction du contrôle sur les vecteurs

I

1. Dans la figure ci-dessous, on construit le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, avec un compas.



2. E est le symétrique de A par rapport à B.
   (a) B est le milieu de [AE].
   (b) Puisque ABCD est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
   B est le milieu de [AE] donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$
   (c) On en déduit que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BE}$ donc BECD est un **parallélogramme**.

II

Dans un repère (O ; I ; J), on considère les points A(1 ; 4), B(5 ; -3) et C(2 ; 5).
ABCD est un parallélogramme équivaut à l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-1=4 \\ -3-4=-7 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 2-x_D \\ 5-y_D \end{pmatrix}$.
Les deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées. $2-x_D = 4$ donne $x_D - 2 - 4 = -2$ et $5 - y_D = -7$ donne $y_D = 5+7+12$.
D a pour coordonnées $\boxed{D(-2\,;\,12)}$.

III

À l'aide de la relation de Chasles, simplifier les expressions suivantes :

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \boxed{\overrightarrow{AD}}$
2. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = \boxed{\overrightarrow{DA}}$

IV

Dans un repère orthonormée, on donne les points : A(-2 ; 4), B(3 ; 3) C(-1 ; 0), D(4 ; -1).

1. • $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-2)=5 \\ 3-4=-1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$
   • $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4-(-1)=5 \\ -1-0=-1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux puisqu'ils ont les mêmes coordonnées. ABDC est donc un **parallélogramme**.
2. Puisque ABDC est un parallélogramme, c'est un losange s'il a deux côtés consécutifs de même longueur.

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ donne $AB=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\boxed{\sqrt{26}}$.
- $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1-3=-4\\0-3=-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$ d'où
  $BC=\sqrt{(-4)^2+(3)^2}=\sqrt{16+9}=\boxed{\sqrt{25}=5}$.
- Il est clair que $AB\neq BC$ car $\sqrt{25}\neq\sqrt{26}$ donc ABDC n'est **pas un losange**.

V

1. On considère les points A(-2 ; -1), B(5 ; 3) et C(7 ; 4).
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix}$.
   $7\times5-9\times4=35-36=-1\neq0$; la condition de colinéarité n'est pas vérifiée donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ; les points A, B et C ne sont **pas alignés**.
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$.
   Il est clair que $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{CD}$ donc ces deux vecteurs sont colinéaires. Les droites (AB) et (CD) **sont parallèles**.

VI

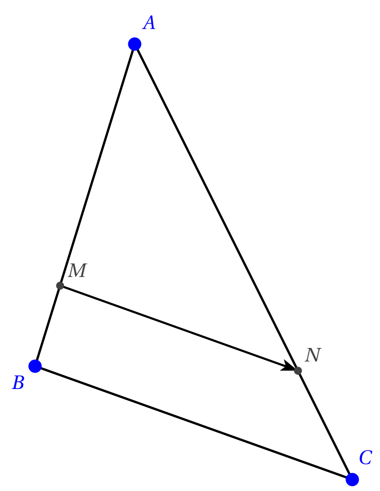
On donne les points A(3 ; -1), B(7 ; 5) et C(-3 ; 3) dans un repère orthonormé (O ; I ; J).

1. - $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ donc $AB=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{16+36}=\boxed{\sqrt{52}}$ $(=\sqrt{4\times13}=2\sqrt{13})$
   - $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-10\\-2\end{pmatrix}$ donc $BC=\sqrt{(-10)^2+(2)^2}=\boxed{\sqrt{104}}$ $(=\sqrt{4\times26}=2\sqrt{26})$
   - $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$ donc $AC=\sqrt{(-6)^2+4^2}=\sqrt{36+16}=\boxed{\sqrt{52}}$
2. $AB=AC$ donc ABC est **isocèle**.
   $BC^2=104$; $AB^2+AC^2=52+52=104$ donc $BC^2=AB^2+AC^2$.
   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A.
   ABC est donc rectangle isocèle en A.

VII non noté

ABC est un triangle quelconque.

1. M et N sont tels que : $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$.



2. (a) $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
   (b) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$
   $=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$
   $=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ donc $\boxed{\overrightarrow{MN}=\frac{3}{3}\overrightarrow{BC}}$
   Les deux vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ donc donc colinéaires : (MN) est donc parallèle à (BC) et $MN=\frac{3}{4}BC$; on retouve la réciproque du théorème de Thalès.