2$^{\text{nde}}$: contrôle sur développements, factorisation, tableaux de signes

I

Développer les expressions suivantes :

$A(x) = (3x+4)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 4 + 4^2$
$= \boxed{9x^2 + 24x + 16}$
(on a appliqué l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 3x$ et $b = 2$)

$B(x) = (7x+5)(7x-5) = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
$= (7x)^2 - 5^2 = \boxed{49x^2 - 25}$ avec $a = 7x$ et $b = 5$.

$C(x) = (2x+7)(7x-4) = 2x \times 7x - 4 \times 2x + 7 \times 7x - 7 \times 4$
$= 14x^2 - 8x + 49x - 28 = \boxed{14x^2 + 41x - 28}$

II

Factoriser les expresions suivantes :

$A(x) = (2x+3)(7x-1) - (2x+3)(3x-7)$
$= (2x+3)[(7x-1) - (3x-7)]$
$= (2x+3)(7x-1-3x+7) = \boxed{(2x+3)(4x+6)}$

On peut améliorer la factorisation :

$A(x) = (2x+3) \times 2(2x+3) = 2(2x+3)(2x+3)$
$= \boxed{2(2x+3)^2}$

$B(x) = (7x+5)^2 - (2x-3)^2 = A^2 - B^2$
$= (A+B)(A-B)$ avec $A = (7x+5)$
et $B = (2x-3)$
$= [(7x+5) + (2x-3)][(7x+5) - (2x-3)]$
$= (7x+5+2x-3)(7x+5-2x+3)$
$= \boxed{(9x+2)(5x+8)}$

-

III

Résoudre les équation suivantes :

a) $(3x+7)(2x+3) = 0$

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

- **Premier cas** : $3x+7 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{7}{3}$
- **Deuxième cas** : $2x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{7}{3} \,;\, \dfrac{3}{2}\right\}}$.

b) $(3x+2)^2 = (5x-3)^2 \Leftrightarrow (3x+2)^2 - (5x-3)^2 = 0$
$\Leftrightarrow [(3x+2] + (5x-3)][(3x+2] - (5x-3)] = 0$
$\Leftrightarrow (8x-1)(-2x+5) = 0.$

On applique le même théorème que précédemment :

On obtient deux solutions : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\dfrac{1}{8} \,;\, \dfrac{5}{2}\right]}$.

IV

Étudier le signe de $(3x+5)(7x-1)$

- **Signe de $3x+5$** :

  $3x+5 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{3}$.

  $3x+5 > 0 \Leftrightarrow 3x > -5 \Leftrightarrow x > -\dfrac{5}{3}$

- **Signe de $7x-1$**.

  $7x - 10 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{7}$.

  $7x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{7}$

On peut aussi utiliser le fait que nous avons deux expressions de fonctions affines croissantes, donc dabord négatives puis positives.

On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$\frac{1}{7}$		$+\infty$
Signe de $3x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $7x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $(x+5)(7x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent, $(x+5)(7x-1)$ est positif sur $\left]-\infty \,;\, -\dfrac{5}{3}\right] \cup \left[\dfrac{1}{7} \,;\, +\infty\right[$ et négatif sur $\left[-\dfrac{5}{3} \,;\, \dfrac{1}{7}\right]$.