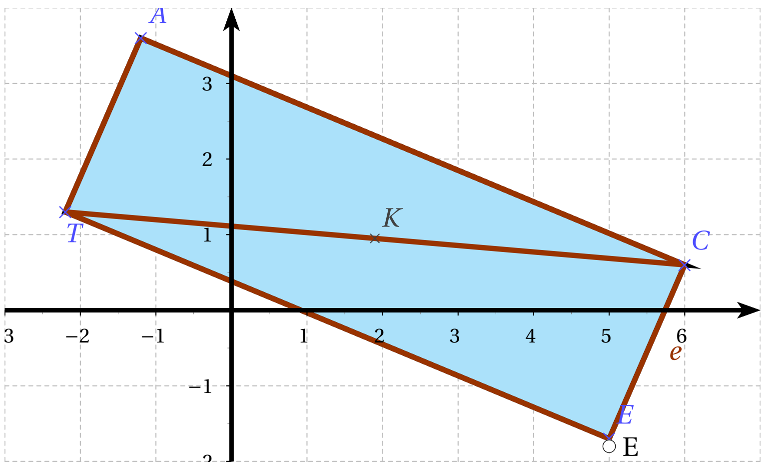
2^nde : devoir sur feuille nº 1

On soignera la rédaction ; on rappelle que chaque réponse doit être justifiée

I

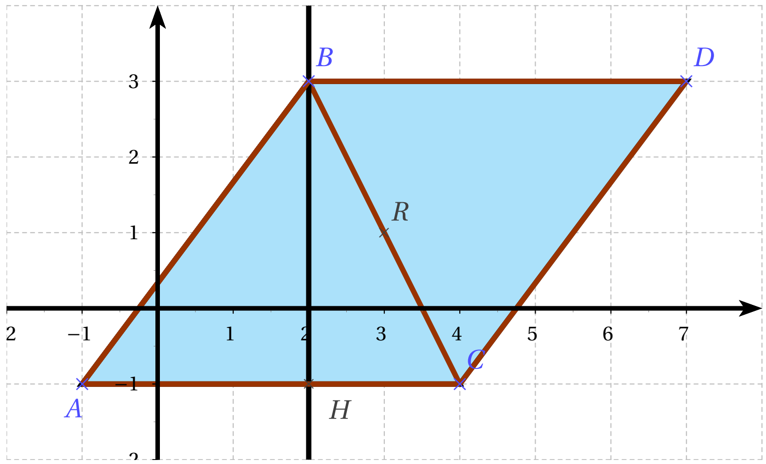
On munit le plan d'un repère orthonormé (0; I; J).
On considère les points T(-2,2; 1,2), A(-1,2; 3,6), C(6; 0,6).



1. Calculer les longueurs des trois côtés du triangle TAC.
   $\overrightarrow{TA}\begin{pmatrix} x_A - x_T = 1 \\ y_A - y_T = 2,4 \end{pmatrix}$ donc
   - $TA = \sqrt{1^2 + 2,4^2} = \boxed{\sqrt{6,76} = 2,6}$.
   - $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A = 7,2 \\ y_C - y_A - 3 \end{pmatrix}$ donc $AC = \sqrt{7,2^2 + 3^2} = \boxed{\sqrt{60,84} = 7,8}$
   - $\overrightarrow{TC}\begin{pmatrix} x_C - x_T = 8,2 \\ y_C - y_T = -0,6 \end{pmatrix}$ donc $TC = \sqrt{8,2^2 + (-O,6)^2} = \boxed{\sqrt{67,6}}$.
2. Le plus grand côté est $TC = \sqrt{67,6}$.
   $TC^2 = 67,6$; $TA^2 + AC^2 = 6,76 + 60,84 = 67,6$.
   Par conséquent : $TC^2 = TA^2 + AC^2$; d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle TAC est **rectangle en A**.
3. K est le milieu de [TC].
   On en déduit : $x_K = \dfrac{x_T + x_C}{2} = \dfrac{-2,2+6}{2} = \dfrac{3,8}{2} = 1,9$ et $y_K = \dfrac{y_T + y_C}{2} = \dfrac{1,2+0,6}{2} = \dfrac{1,8}{2} = 0,9$, donc $\boxed{K(1,9\ ;\ 0,9)}$
4. Puisque TAC est rectangle en A, pour que ECAT soit un rectangle, il suffit que ECAT soit un parallélogramme.
   Pour cela, puisque K est le milieu de $[CT]$, il faut que K soit le milieu de [AE].
   On doit avoir $x_K = \dfrac{x_A + x_E}{2}$ donc $2x_K = x_A + x_E$ qui donne $x_E = 2x_K - x_A = 5$.
   De même : $y_K = \dfrac{y_A + y_E}{2}$ donc $2y_K = y_A + y_E$ qui donne $y_E = 2y_K - y_A = -1,8$.
   K a pour coordonnées : $\boxed{K(5\ ;\ -1,8)}$.

II

1. Dans un repère (O ; I ; J) orthonormé d'unité 1 cm, placer les points : A(-1 ; -1), B(2 ; 3), C(4 ; -1) et D(7 ; 3).
   Figure :



   Le triangle ABC semble isocèle.

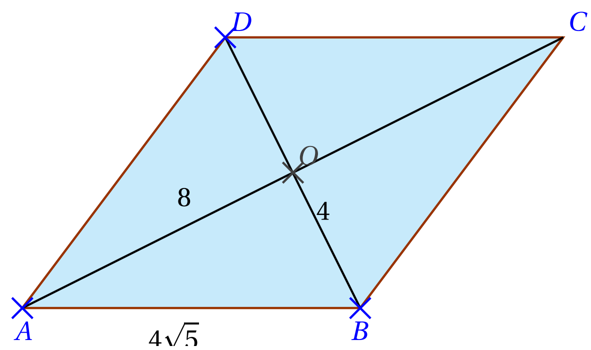
   - $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ donc $AB = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$.
   - $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ donc $BC = \sqrt{2^2+(4)^2} := \sqrt{20}$.
   - $AC = 5$ car A et C ont la même abscisse.

   $AC = BC$ donc le triangle ABC est isocèle en C.

2. Le périmètre du trangle ABC est $\mathscr{P}(ABC) = AB + BC + AC = 5 + \sqrt{20} + 5 = \boxed{10+\sqrt{20}}$.
3. Placer le point H, pied de la hauteur issue de B du triangle ABC. $[BC]$ est parallèle à l'axe des abscisses car A et C ont les mêmes abscisses.
   La hauteur issue de B est donc parallèle à l'axe des ordonnées.
   On en déduit que H a la même abscisse que B et même ordonnée que A et C
   On en déduit que les coordonnés de H sont $\boxed{H(2\,;\,-1)}$
4. $\mathscr{A}(ABC) = \frac{AC}{\times} BH2 = \frac{5\times 4}{2} = 10$.
5. R est le milieu de $[BC]$.
   Alors : $x_R = \frac{x_B + x_C}{2} = 3$ et $y_R = \frac{y_B + y_C}{2} = 1$: $\boxed{R(3\,;\,1)}$
6. $\frac{x_A + x_D}{2} = 3 = x_R$ et $\frac{yx_A + y_D}{2} = 1 = y_R$ donc R est aussi le milieu de $[AD]$.
7. Les diagonales du quadrilatère $ABDC$ ont le même milieu : c'est un parallélogramme.
   $AB = AC = 5$ donc ce parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur : c'est un **losange**.

III

Le parallélogramme $ABCD$ ci-dessous est-il un losange?
(On a $AB = 4\sqrt{5}$, $AO = 8$ et $OB = 4$)

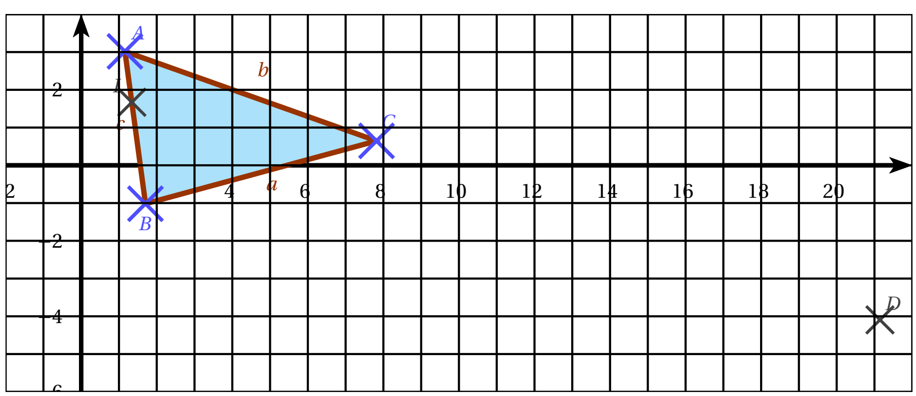


- $AB^2 = \left(4\sqrt{5}\right)^2 = 16 \times 5 = 80$
- $AO^2 = 8^2 = 64$
- $OB^2 = 4^2 = 16$
- $AO^2 + OB^2 = 64 + 16 = 80$ donc $\boxed{AB^2 = AO^2 + OB^2}$.
  D'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, AOB est rectangle en 0.

Ce parallélogramme a donc deux diagonales perpendiculaires : c'est un **losange**

IV

Soit ABC un triangle quelconque, I tel que $\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{AI}$ et D défini par $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{IC}$
Figure :



1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AI} = \boxed{3\overrightarrow{AI}}$ (en utilisant la **relation de Chasles**).
2. D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{IC}$.
3. Construire le point D. (voir figure)
4. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{IC} = 3\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}\right) = \boxed{3\overrightarrow{AC}}$ (en appliquant la relation de Chasles)
5. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \left(\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{IC}\right) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{IC} = \boxed{3\overrightarrow{IC}}$.
6. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$, on a :
   - $A(0\ ;\ 0)$
   - $B(1\ ;\ 0)$
   - $C(0\ ;\ 1)$
   - $D(0\ ;\ 3)$

   car $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$

   - $I\left[\dfrac{1}{3}\ ;\ 0\right]$

   car $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

V

Le tableau suivant résume les résultats obtenus par la classe de seconde C d'un lycée lors d'un devoir de mathématiques.

Notes	3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	17	18
Effectifs	1	2	1	3	3	5	6	4	2	1	2	2	1
E.C.C	1	3	4	7	10	15	21	25	27	28	30	32	33

1. Dans cette classe, il a $\boxed{33}$ élèves.
   L'étend des notes est $18-3=\boxed{15}$
2. Il y a 10 élèves qui ont une note inférieure ou égale à 8.
   $\dfrac{10}{33}\approx 0,303 : \dfrac{30,3}{100}=\boxed{30,3\,\%}$. 30,3 % des élèves ont une note inférieure ou égale à 8.
3. • La moyenne est $\overline{x}=\dfrac{330}{33}=\boxed{10}$.
   • La médiane est $\boxed{10}$ (trouvé à la calculatrice).
   • $\dfrac{33}{4}=8,25$ donc $\boxed{Q_1=x_9=8}$; $3\times\dfrac{33}{4}=24,75$ donc $\boxed{Q_3=x_{25}=11}$.
4. L'effectif total est 33 ; 33 est impair et $33=2\times 16+1$ donc $\boxed{\text{Me}=x_{17}=10}$.
5. Soit x la note obtenue par Bastien. Sa moyenne est $\dfrac{3\times 9+x}{4}=9,5$ donc $27+x=4\times 9,5=38$ donc $\boxed{x=11}$.
6. Dans le lycée, les trois autres classes de seconde ont effectué le même devoir. Les moyennes par classe obtenues sont les suivantes :

Classes	Seconde A	Seconde B	Seconde C	Seconde D
Moyennes de chaque classe	8	11	**10**	8,5
Effectifs de chaque classe	34	n	**33**	32

   La moyenne du lycée est :
   $m=\dfrac{(8\times 34)+11n+(10\times 33)+(8,5\times 32)}{34+n+33+32}=\dfrac{11n+874}{99+n}$.
   On a donc : $\dfrac{11n+874}{99+n}=9,28$ donc $11n+874=9,28(99+n)=918,72+9,28n$.
   D'où $11n-9,28n=918,72-874$ donc $1,72n=44,72$. Alors $n=\dfrac{44,72}{1,72}=\boxed{26}$.
7. On effectue un regroupement en classes des notes des élèves de seconde C. Compléter le tableau suivant :

Notes	[0 ; 5 [	[5 ; 8 [	[8 ; 10 [	[10 ; 12 [	[12 ; 15 [	[15 ; 20]
Effectifs	1	6	8	10	5	3

8. La moyenne vaut :
   $\overline{x'}=\dfrac{(2,5\times 1)+(6,5\times 6)+(9\times 8)+(11\times 10)+(13,5\times 5)+(17,5\times 3)}{33}=\dfrac{343,5}{33}\boxed{\approx 10,41}$.
   Cette moyenne est légèrement supérieure à celle calculée directement sans faire de regroupement pas classes.

VI

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$.

   (a) f est affine de coefficient directeur $-\frac{3}{2} < 0$; $f(x) = ax + b$ avec $\begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = 3 \end{cases}$; $f(x)$ s'annule pour $x = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{-\frac{3}{2}} == 2$.

   Tableau de signe :

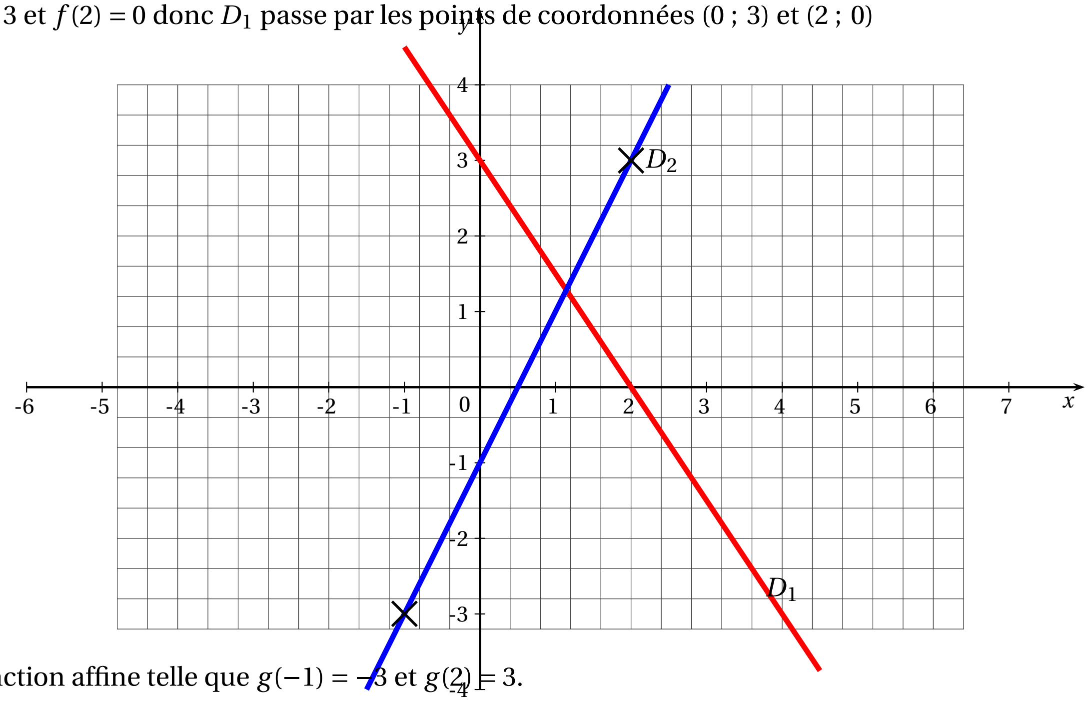
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

   (b) Le coefficient directeur est $-\frac{3}{2} < 0$ donc la fonction est **décroisssante**.

   Si $a < b$, alors $\boxed{f(a) > f(b)}$ (f renverse l'ordre).

   (c) Dans le plan muni d'un repère orthonormé tracer la courbe D_1 représentative de la fonction f.

   $f(0) = 3$ et $f(2) = 0$ donc D_1 passe par les points de coordonnées (0 ; 3) et (2 ; 0)



2. Soit g la fonction affine telle que $g(-1) = -3$ et $g(2) = 3$.

   (a) D_2 tracée ci-dessus.

   (b) g est affine donc il existe deux nombres a' et b' tels que $g(x) = ax + b$.

   $a = \frac{g(2) - g(-1)}{2 - (-1)} = \frac{6}{3} = 2$.

   $g(x) = 2x + b$; $g(-1) = -3$ donne $2 \times (-1) + b' = -3$ donc $b = -3 + 2 = -1$.

   On en déduit : $\boxed{g(x) = 2x - 1}$.

3. $f(x) \leqslant 2x - 1$ s'écrit $-\frac{3}{2}x + 3 \leqslant 2x - 1$

   On en déduit : $-\frac{3}{2}x - 2x \leqslant -1 - 3$ donc $-\frac{7}{2}x \leqslant -4$. 2 On divise par $-\frac{7}{2}$ qui est négatif; cela donne :

   $x \geqslant \frac{-4}{-\frac{7}{2}} = -4 \times \left(-\frac{2}{7}\right)$ donc $x \geqslant \frac{8}{7}$ d_1 est en dessous de d_2 pour $x \geqslant \frac{8}{7}$.

   Interprétation : résoudre cette inéquation revient à trouver les valeurs de x telles que $f(x) \leqslant g(x)$ c'est-à-dire les abscisses des points pour lesquels D_1 est en dessous de D_2.