RAPPELS SUR LES DÉVELOPPEMENTS ET FACTORISATIONS

Table des matières

I Développements

Définition

Développer une expression algébrique consiste à la transformer en retirant les « enveloppes », c'est-à-dire les parenthèses.

Propriété fondamentale (distributivité)

$k(a+b) = ka + kb$
$k(a-b) = ka - kb$

Exemple : $2(x+3) = 2x + 2\times 3 = 2x + 6$

On en déduit le développement suivant :
$\boxed{(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd}$

Démonstration : $(a+b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d = ac + bc + ad + bd = ac + ad + bc + bd$

Remarque Quand on a des signes -, on développe comme ci-dessus et on tient compte de la règle des signes : (car $a - b = a + (-b)$)

Exemple : $(2x-3)(3x-5) = 2x \times 3x - 2x \times 5 - 3 \times 3x + 3 \times 5 = 6x^2 - 10x - 9x + 15 = \boxed{6x^2 - 19x + 15}$

Identités remarquables

Il y a trois développements particuliers que l'on retrouve sans arrêt, qu'on appelle identités remarquables :

- $(a+b))2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b))2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Exemples :

$$\mathrm{A} = (2x+3)^2 = (a+b)^2 \text{ avec } \begin{cases} a = 2x \\ b = 3 \end{cases}$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = \boxed{4x^2 + 6x + 9}$$

$$\mathrm{B} = (7x+5)(7x-5) = (a+b)(a-b) \text{ avec } \begin{cases} a = 7x \\ b = 5 \end{cases}$$

$$= a^2 - b^2 = (7x)^2 - 5^2 = \boxed{49x^2 - 25}$$

$$\mathrm{C} = (\sqrt{7} - \sqrt{3})^2 = (a-b)^2 \text{ avec } \begin{cases} a = \sqrt{7} \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$= a^2 - b^2 = \sqrt{7}^2 - \sqrt{3}^2 = 7 + 3 = \boxed{4}$$

II Factorisations

Définition

Factoriser une expression algébrique consiste à la transformer(lorsque c'est possible) pour qu'elle soit sous la forme d'un produit de facteurs le plus simples possibles.

Remarque : Toutes les expressions algébriques ne sont pas factorisables dans $\mathbb{R}$.

Exemple : $x^4 + 1$ ne peut pas se factoriser dans $\mathbb{R}$.

II.1 Règles utilisées pour factoriser une expression

On utilise essentiellement ces cinq règles, dont les trois identités remarquables .

Avec un facteur commun :

- $ab + ac = a(b+c)$
- $ab - ac = a(b-c)$

Avec une identité remarquable :

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = (a-b)(a+b)$

II.2 Comment factoriser une expression algébrique ?

Méthode

- On recherche d'abord si l'expression a un facteur commun (évident ou pas) pour utiliser l'une des deux premières règles.
- S'il n'y pas de facteur commun, on essaye de voir si l'on peut appliquer une identité remarquable.
- Il peut y avoir les deux cas combinés.
- Dans des cas rares, il faut d'abord développer, simplifier, puis factoriser le résultat.

Les exemples qui suivent ont pour but de vous montrer les différents cas possibles. La liste n'est évidemment pas exhaustive ; on ne devient « bon » dans les factorisations qu'en s'entraÓnant beaucoup.
(voir, par exemple le site Euler de l'académie de Versailles : cliquer ici)

II.3 Exemples avec un facteur commun

1) $2xy + 3xz = x(2y + 3z)$

2) $x^2 - 3x = x \times x - 3x = x(x-3)$

3) **Factoriser** $(2x+3)(5x+7)+(2x+3)(-2x+9)$.
On essaye de voir comment est constituée l'expression pour voir quelle règle l'on va utiliser.

$\underbrace{(2x+3)}_{a}\underbrace{(5x+7)}_{b}+\underbrace{(2x+3)}_{a}\underbrace{(-2x+9)}_{c}$

$= ab + ac$ en posant : $\begin{cases} a = 2x+3 \\ b = 5x+7 \\ c = -2x+9 \end{cases}$

$= a(b+c)$

$= (2x+3)\left[(5x+7)+(-2x+9)\right]$

$= (2x+3)(5x+7-2x+9)$

$= (2x+3)(3x+16)$

donc : $\boxed{(2x+3)(5x+7)+(2x+3)(-2x+9) = (2x+3)(3x+16)}$

4) **Factoriser** $(3x+5)(7x-4)-(5x-3)(3x+5)$.

$\underbrace{(3x+5)}_{a}\underbrace{(7x-4)}_{b}-\underbrace{(5x-3)}_{c}\underbrace{(3x+5)}_{a}$

$= ab - ca$ en posant : $\begin{cases} a = 3x+5 \\ b = 7x-4 \\ c = 5x-3 \end{cases}$

Remarque : $ab - ca = ab - ac = a(b-c)$. En remplaçant a, b et c par leurs expressions, on trouve :

$(3x+5)\left[(7x-4)-(5x-3)\right]$

$= (3x+5)(7x-4-5x+3)$ (attention au signe - devant la parenthèse)

$= (3x+5)(2x-1)$

donc : $\boxed{(3x+5)(7x-4)-(5x-3)(3x+5) = (3x+5)(2x-1)}$

5) **Factoriser** $(7x+1)^2-(7x+1)(3-2x)$.
On remarque que : $(7x+1)^2-(7x+1)(3-2x) = \underbrace{(7x+1)}_{a}\underbrace{(7x+1)}_{a}-\underbrace{(7x+1)}_{a}\underbrace{(3-2x)}_{b}$

$= aa - ab$ avec $\begin{cases} a = 7x+1 \\ b = 3-2x \end{cases}$
$= a(a-b)$
$= (7x+1)\left[(7x+1)-(2-3x)\right]$
$= (7x+1)(7x+1-2+3x)$
$= (7x+1)(10x-1)$
Par conséquent : $\boxed{(7x+1)^2-(7x+1)(3-2x) = (7x+1)(10x-1)}$.

6) **Factoriser** $(x+3)^2-(x+3)$.
Il est clair que $(x+3)$est un facteur commun.
$(x+3)^2-(x+3)$
$= \underbrace{(x+3)}_{a}\times\underbrace{(x+3)}_{a}-\underbrace{(x+3)}_{a}\times 1$
$= a\times a - a\times 1$ avec $a = (x+3)$
$= a(a-1)$
$= (x+3)[(x+3)-1]$
$= (x+3)(x+2)$.
D'où : $\boxed{(x+3)^2-(x+3) = (x+3)(x+2)}$.

II.4 Avec un facteur commun moins apparent

7) **Factoriser** : $(3x+5)(2x+7)-(6x+10)(x+13)$.
Il n'y pas de facteur commun apparent, mais il est clair que $6x+10 = 2(3x+5)$.
Par conséquent : $(3x+5)(2x+7)-(6x+10)(x+13) = (3x+5)(2x+7)-2(3x+5)(x+13)$.
$\underbrace{(3x+5)}_{a}\underbrace{(2x+7)}_{b}-2\underbrace{(3x+5)}_{a}\underbrace{(x+13)}_{c}$
$= ab-2ac$ avec $\begin{cases} a = 3x+5 \\ b = 2x+7 \\ c = x+13 \end{cases}$
$= a(b-2c)$
$= (3x+5)\left[(2x+7)-2(x+13)\right]$
$= (3x+5)(2x+7-2x-26)$
$= (3x+5)(-19)$
$= -19(3x+5)$.

Par conséquent : $\boxed{(3x+5)(2x+7)-(6x+10)(x+13) = -19(3x+5)}$

8) **Factoriser** $(15x-3)(2x+7)-10x+2$.
On remarque que : $15x-3 = 5(3x-1)$ et $-10x+2 = -(10x-2) = -2(5x-1)$.

Par conséquent :
$(15x-3)(2x+7)-10x+2 = 3\underbrace{(5x-1)}_{a}\underbrace{(2x+7)}_{b}-2\underbrace{(5x-1)}_{a} = 3ab-2a$ avec $\begin{cases} a = 5x-1 \\ b = 2x+7 \end{cases}$
$= a(3b-2)$

$= (5x-1)(3(2x+7)-2)$
$= (5x-1)(6x+21-2)$
$= (5x-1)(6x+19)$.
D'où : $\boxed{(15x-3)(2x+7)-10x+2 = (5x-1)(6x+19)}$

II.5 Avec des identités remarquables

9) **Factoriser** : $9x^2+42x+49$.
Il n'y aucun facteur commun donc on recherche si on peut faire apparaÓtre une identité remarquable.

$9x^2+42x+49 = (3x)^2+2\times(3x)\times 7+7^2 = a^2+2ab+b^2$ avec $\begin{cases} a=3x \\ b=7 \end{cases}$
$= (a+b)^2$
$= (3a+7)^2$.
Par conséquent : $\boxed{9x^2+42x+49 = (3x+7)^2}$

10) **Factoriser** : $100x^2-121$.
$100x^2-121 = (10x)^2-11^2 = a^2-b^2$ avec $a = 10x$ et $b = 11$
$= (a+b)(a-b)$
$= (10x+11)(10x-11)$.
D'où : $\boxed{100x^2-121 = (10x+11)(10x-11)}$

11) **Factoriser** $(2x+9)^2-(3x-13)^2$.
On voit que l'expression est la différence de deux carrés, ce qui fait penser à une identité remarquable.

$(2x+9)^2-(3x-13)^2$
$= a^2-b^2$ avec $a = (2x+9)$ et $b = (3x-13)$
$= (a+b)(a-b)$
$= [(2x+9)+(3x-13)]\,[(2x+9)-(3x-13)]$
$= (2x+9+3x-13)(2x+9-3x+13)$
$= (5x-4)(-x+22)$

Par conséquent : $\boxed{(2x+9)^2-(3x-13)^2 = (5x-4)(-x+22)}$

II.6 Avec facteur commun et identités remarquables

12) **Factoriser** $A = (4x-4)-(5x-13)(x-1)+x^2-1$
On remarque que : $4x-4 = 4(x-1)$ et $x^2-1 = x^2-x^2 = (x+1)(x-1)$ (identité remarquable).
Par conséquent :
$A = 4\underbrace{(x-1)}_{a}-\underbrace{(5x-13)}_{b}\underbrace{(x-1)}_{a}+\underbrace{(x+1)}_{c}\underbrace{(x-1)}_{a}$
$= 4a-ba+ca$ avec $a = (x-1)$; $b = (5x-13)$ et $= (x+1)$
$= a(4-b+c)$
$= (x-1)[4-(5x-13)+(x+1)]$
$= (x-1)(4-5x+13+x-1)$
$= (x-1)(-4x+16)$
$= (x-1)\times 4(-x+4)$
$= 4(x-1)(-x+4)$

D'où : $\boxed{A=(4x-4)-(5x-13)(x-1)+x^2-1=4(x-1)(-x+4)}$.

13) **Factoriser** $B=x^2-4x+4+(1-5x)(2-x)+(x-2)$
On remarque que : $x^2-4x+4=x^2-2\times x\times 2+2^2=(x-2)^2$ (identité remarquable) et que $(2-x)=(-1)\times(x-2)=-(x-2)$.

Par conséquent : $B=x^2-4x+4+(1-5x)(2-x)+(x-2)$
$=(x-2)^2+(1-5x)\times(-1)\times(2-x)+(x-2)$
$=\underbrace{(x-2)}_{a}\underbrace{(x-2)}_{a}-\underbrace{(1-5x)}_{b}\underbrace{(x-2)}_{a}+\underbrace{(x-2)}_{a}$ avec $a=(x-2)$, $b=(1-5x)$
$=aa-ba+a$
$=a(a-b+1)$
$=(x-2)[(x-2)-(1-5x)+1]$
$=(x-2)(x-2-1+5x+1)\pm\pm=(x-2)(6x-2)$
$=(x-2)\times 2(3x-1)$
$=2(x-2)(3x-1)$.

Par conséquent : $\boxed{B=x^2-4x+4+(1-5x)(2-x)+(x-2)=2(x-2)(3x-1)}$

II.7 Quand on ne voit ni facteur commun, ni identité remarquable

14) **Factoriser** $3x^2-5x+18+(3x+2)(5x-9)$.
On ne voit ni facteur commun , ni identité remarquable.
En développant, on trouve;
$A=3x^2-5x+18+(3x+2)(5x-9)$
$=3x^2-5x+18+(15x^2-27x+10x-18)$
$3x^2-5x+18+15x^2-27x+10x-18$
$=18x^2-22x$
$=9\times 2x\times x-11\times 2x$
$=2x(9x-11)$.

D'où : $\boxed{3x^2-5x+18+(3x+2)(5x-9)=2x(9x-11)}$

Remarque :
Vous verrez en Première une technique pour factoriser, lorsque cela est possible, toute expression du second degré, c'est-à-dire une expression du type ax^2+bx+c, a, b et c réels, $a\neq 0$.

III Pour s'entraîner sur Internet sur le site Euler de l'académie de Versailles

III.1 Développements :

- Développement d'une expression de la forme $f(x) = a(bx+c)$ où a, b et c sont trois entiers relatifs : cliquer ici
- Développement d'une expression de la forme$f(x) = a(bx+c)$ où a, b et c sont trois nombres rationnels : cliquer ici
- Développement d'une expression de la forme $f(x) = (ax+b)(cx+d)$ où a, b, c et d sont quatre entiers relatifs : cliquer ici
- Développement d'une expression de la forme $f(x) = (ax+b)(cx+d)$ où a, b, c et d sont quatre nombres rationnels : cliquer ici
- Développement d'expressions algébriques en utilisant des identités remarquables à coefficients entiers : cliquer ici
- Développement d'expressions algébriques en utilisant des identités remarquables à coefficients donnés en écriture fractionnaire : cliquer ici
- Calcul de nombres de la forme $\left(a-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{b}\right)$ où a et b sont deux entiers naturels : cliquer ici
- Ecriture de nombres A de la forme $A = (a+b\sqrt{c})^2$ sous la forme $A = d+e\sqrt{f}$ où a, b, c, d, e et f sont six entiers relatifs : cliquer ici
- Développement d'une expression algébrique de la forme $(ax+b)^2+(cx+d)(ex+f)$ où a, b, c, d, e et f sont six entiers relatifs : cliquer ici
- Calcul de nombres de la forme $(\sqrt{a}\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ où a et b sont deux entiers naturels : cliquer ici

III.2 Factorisation :

- Ecriture d'une expression algébrique sous la forme $A(x) = a(bx+c)$ où a, b et c sont trois entiers relatifs : cliquer ici
- Factorisation d'une expression algébrique de la forme $A(x) = (ax+b)(cx+d)+(ax+b)(ex+f)$: cliquer ici
- Factorisation d'une expression algébrique de la forme $A(x) = k(ax+b)(cx+d)+k'(ax+b)(ex+f)$: cliquer ici
- Factorisation d'une expression algébrique de la forme $A(x) = (ax+b)(cx+d)(ax+b)(ex+f)$: cliquer ici
- Factorisation d'expressions algébriques dont les coefficients sont entiers en utilisant une identité remarquable : cliquer ici
- Factorisation d'expressions algébriques dont les coefficients sont donnés en écriture fractionnaire en utilisant une identité remarquable : cliquer ici
- Factorisation d'une expression algébrique de la forme $A(x) = (ax+b)^2(cx+d)^2$ où a, b, c et d sont quatre entiers relatifs donnés : cliquer ici
- Factorisation d'expressions algébriques de la forme $A(x) = (ax+b)^2+(ax+b)(cx+d)$ où a, b, c et d sont quatre entiers relatifs : cliquer ici
- Factorisation d'expressions algébriques de la forme $A(x) = (ax+b)^2(ax+b)(cx+d)$ où a, b, c et d sont quatre entiers relatifs : cliquer ici
- Factorisation d'expressions algébriques dont les coefficients sont écrits à l'aide de radicaux en utilisant une identité remarquable : cliquer ici