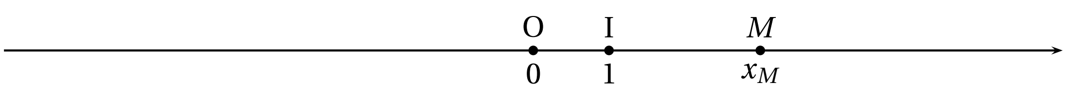
Géométrie repérée

Table des matières

I Sur une droite

Définition

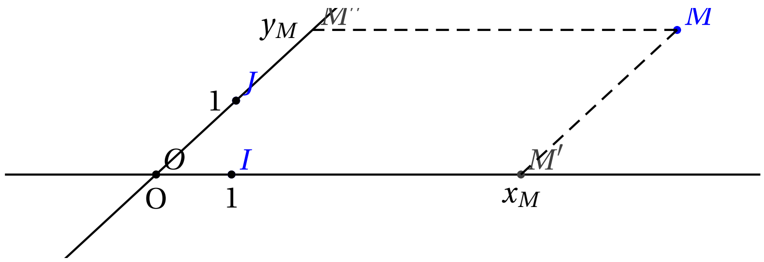
Soit une droite (d). On la munit d'un repère $(O\ ;\ I)$.
Alors, tout point M est repéré par un réel x appelé abscisse de M.
¿ chaque point correspond une abscisse et ‡ chaque nombre correspond un point.
L'ensemble des abscisses des points de la droite sont les nombres **réels**.



II Repérage dans le plan

Définition

Pour repérer un point dans le plan, on trace deux droites (**axes**) sécants en O, origine du repère. Sur un axe, on place un point I qui permet de définir un repère sur cet axe.
De même, sur l'autre axe, on choisit un point J qui définit un repère sur cet axe.
$(O\ ;\ I\ ;\ J)$ définit alors un repère du plan.
Soit M un point quelconque. On trace les parallèles aux axes passant par M ; elles coupent ces deux axes en M' et M''.
M' est repéré par un nombre x_M et M'' par un nombre y_M.
On dit que x_M et y_M sont les coordonnées de M dans le repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$. x_M est l'abscisse de M et y_M l'ordonnée de M.
On écrit : $M\left(x_M\ ;\ y_M\right)$ ou $M(x\ ;\ y)$



Définition

Prendre des axes quelconques n'est pas toujours pratique. Qaud on peut, on les prend perpendiculaires. Si les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires, on dit que le repère $(O\,;\ I\,;\ J)$ est **orthogonal**.
Si le repère est orthogonal et que, de plus, les longueurs OI et OJ sont égales, on dit que le repère est **orthonormal** ou **orthonormé**.

Propriétés

Deux points sont confondus si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées.

Exercices n° 1 et 2 page 221

Exercices n° 15 ; 16 ; 17 ; 19 ; 20 ; 21 page 230

III Coordonnées du milieu d'un segment

Définition

Soient deux points $A\left(x_A\,;\ y_A\right)$ et $B\left(x_B\,;\ y_B\right)$ deux points. Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

Exemples d'application :

Exemple 1 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\ I\,;\ J)$, on considère les points A(-3 ; -1), B(5 ; -2), C(7 ; 3) et D(-1 ; 4).
Montrer que ABCD est un parallélogramme.

Solution :
Notons K et L les milieux des deux diagonales $[AC]$ et $[BD]$.
$x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-3+7}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1$
$x_L = \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{5+(-1)}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $y_L = \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{-2+4}{2} = 1$
K et L sont les mêmes coordonnées donc $K = L$.
Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ ont le même milieu : $\boxed{\text{ABCD est un parallélogramme}}$.

Exemple 2 On considère les points A(2 ; 5), B(-1 ; 7) et C(11 ; 13).
On cherche les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

Solution

On note x_D et y_D les coordonnées de D.
ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, les diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu.
Soit M le milieu de [AC] ; on a :

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A = x_C}{2} = \dfrac{13}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = 9 \end{cases}.$$

De même, les coordonnées du milieu de [AD] sont : $\begin{cases} \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{-1 + x_D}{2} \\ \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{7 + y_D}{2} \end{cases}$

Les deux diagonales ont le même milieu, donc on doit avoir égalité entre les coordonnées :
Donc $\dfrac{-1 + x_D}{2} = \dfrac{13}{2}$ d'o˘ $-1 + x_D = 13$, donc $x_D = 14$.
$\dfrac{7 + y_D}{2} = 9$ donc $7 + y_D = 18$ d'o˘ $y_D = 11$.
D a pour coordonnées $\boxed{\text{D(14 ; 11)}}$.

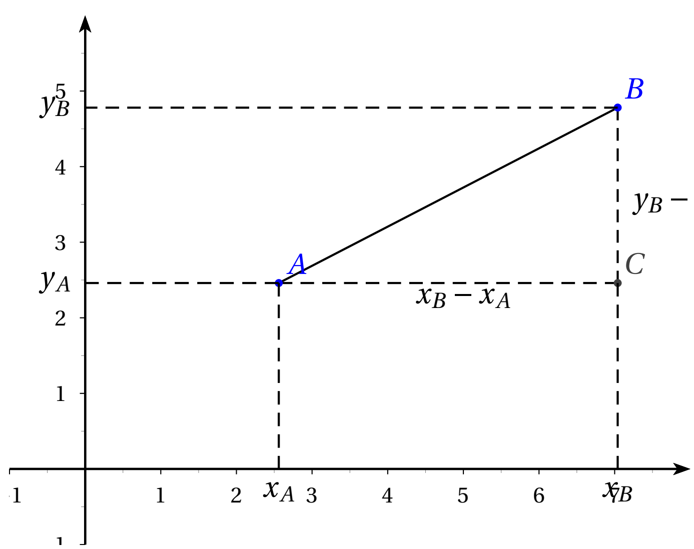
IV Distance entre deux points

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; I ; J).
On considère les points $A\left(x_A\ ;\ y_A\right)$ et $B\left(x_B\ ;\ y_B\right)$.
Alors, la distance AB vaut : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$

Démonstration :

Supposons que $x_B > x_A$ et $y_B > y_A$.
Cette démonstration est basée sur le théorème de Pythagore.



Comme le repère est orthonormé, le triangle ABC est rectangle.
D'après le théorème de Pythagore, on a : $AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2$.

Par conséquent : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$.

On admet que cette démonstration est valable quelles que soient les positions de A et de B.

Exercice :
Montrer que le point $A\left(1\ ;\ \sqrt{2}\right)$ appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + \left(y_A - y_O\right)^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$.
La longueur OA est égale au rayon du cercle donc A appartient au cercle.

Exercice :
Soient $A(1\ ;\ -2)$ et $B(4\ ;\ 2)$.
Montrer que B appartient au cercle de centre $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon $\sqrt{5}$.
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.
B appartient bien au cercle de centre A et de rayon 5.

Exercice :
Soient $A(-2\ ;\ -1)$, $B(1\ ;\ 3)$ et $C(-3\ ;\ 6)$.
Démontrer que ABC est rectangle isocèle.

- $AB = \sqrt{(1-(-2))^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
- $BC = \sqrt{(-3-1)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
- $AC = \sqrt{(-3-(-2))^2 + (6-(-1))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$
- $AB = BC$ donc ABC est isocèle.
- $AC^2 = \sqrt{50}^2 = 50$; $AB^2 + BC^2 = 5^2 + (^2 = 25 + 25 = 50$.
  $AC^2 = AB^2 + BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle.
  Il est donc $\boxed{\text{isocèle rectangle en B}}$.