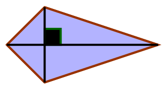
Corrigé du contrôle commun n° 1 de mathématiques

I Vrai ou Faux

Pour chacune des propositions ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.
   FAUX : il faudrait de plus qu'elles aient le même milieu. (1,5 pt)

2. Si un point est à égale distance des extrémités d'un segment, alors ce point est le milieu du segment.
   FAUX : il appartient la médiatrice de ce segment; par exemple, le sommet principal d'un triangle isocèle. (1,5 pt)

3. Le point $A(2;-4)$ appartient au cercle de centre $I(1;0)$ et de rayon $\sqrt{17}$.
   VRAI : $AI = \sqrt{\left[x_I - x_A\right)^2 + \left(y_I - y_A\right)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (0-(-4))^2} = \sqrt{1+16} = \boxed{\sqrt{17}}$ (1,5 pt)

4. Le point $B\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{2x+5}$.
   VRAI : $f\left(x_B\right) = f(-1) = \dfrac{1}{2\times(-1)+5} = \dfrac{1}{3} = y_B$. (1,5 pt)

5. Si $g(-1) = 0$, alors g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + x$.
   FAUX : L'image d'un seul nombre ne suffit pas à caractériser une fonction : par exemple, la fonction f définie par $f(x) = x+1$ vérifie aussi $f(-1) = 0$. (1,5 pt)

II

1	:	Entrées : x
2	:	Sorties : y
3	:	$b \leftarrow x+3$
4	:	$c \leftarrow -4x^2$
5	:	$y \leftarrow 2b+c$

1. Si l'entrée est 2, on a successivement $x = 2$, $b = 2+3 = 5$, $c = -4x^2 = -4\times 2^2 = -4\times 4 = -16$ et $y = 2b+c = 2\times 5 + (-16) = \boxed{-6}$. (1,5 pt)
2. Pour une entrée égale à x, on obtient $b = x+3$, $c = -4x^2$ et $y = 2b+c = 2(x+3)-4x^2$ donc $\boxed{f(x) = -4x^2+2x+6}$. (2 pt)

III

Dans un repère orthonormé $(O~;~I~;~J)$, on considère les points :

$$A(3~;~1)~~;~~B(9~;~-1)~~;~~C(8~;~6)~~\text{et}~~D(4~;~-6)$$

1. Figure à la fin : (1 pt)
2. On cherche dans cette question à déterminer la nature exacte du quadrilatère $ACBD$.

   a. Soit M le milieu de $[AB]$. On a : $x_M = \dfrac{x_A+x_B}{2} = \dfrac{3+9}{2} = 6$ et $y_M = \dfrac{y_A+y_B}{2} = \dfrac{1+(-1)}{2} = 0$ donc $\boxed{M(6~;~0)}$.

   Soit M' le milieu de $[CD]$. On a : $x_M = \dfrac{x_C+x_D}{2} = \dfrac{8+4}{2} = 6$ et $y_M = \dfrac{y_C+y_D}{2} = \dfrac{6+(-6)}{2} = 0$ donc $\boxed{M'(6~;~0)}$.

   M et M' ont les mêmes coordonnées, donc $M = M'$. Les diagonales du quadrilatère $ACBD$ nt le même milieu : c'est un **parallélogramme**. (2 pt) *b.* • $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(9-3)^2 + (-1-(-1))^2} = \boxed{\sqrt{40}}$

• $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \boxed{\sqrt{50}}$

• $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(8-9)^2 + (6-(-1))^2} = \boxed{\sqrt{50}}$

Le triangle ABC est isocèle en C. (2 pt)

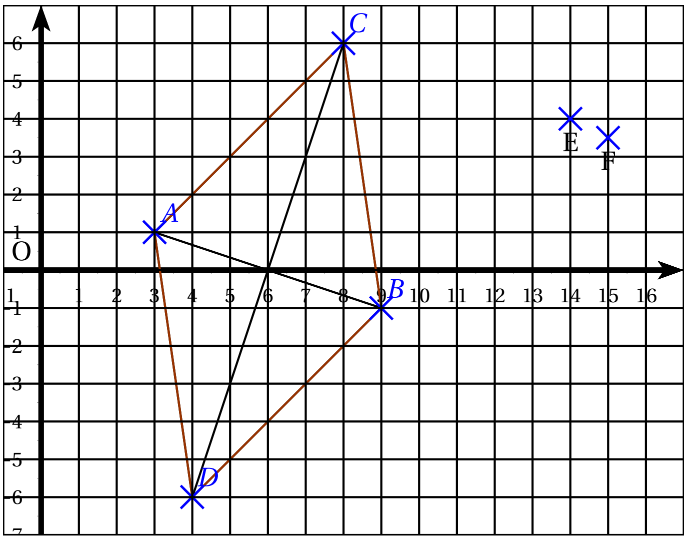
c. On en déduit que les quatre côtés du quadrilatère $ACBD$ ont les mêmes longueurs, donc $ACBD$ un **losange**. (1 pt)

3. E est le symétrique de D par rapport à B équivaut à B milieu de $[DE]$.
On en déduit que :
$x_B = \dfrac{x_D + x_E}{2}$ donc $9 = \dfrac{4 + x_E}{2}$ d'où $18 = 4 + x_E$ donc $x_E = 18 - 4 = 14$.
$y_B = \dfrac{y_D + y_E}{2}$ donc $-1 = \dfrac{-6 + y_E}{2}$ d'où $-2 = -6 + y_E$ donc $y_E = -2 + 6 = 4$.
On en déduit que les coordonnées de E sont $\boxed{E(14\,;\,4)}$ (2 pt)

4. $CF = \sqrt{(x_F - x_C)^2 + (y_F - y_C)^2} = \sqrt{(15-8)^2 + \left(\dfrac{7}{2} - 6\right)^2} = \sqrt{7^2 + \left(-\dfrac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{49 + \dfrac{25}{4}} = \sqrt{\dfrac{221}{4}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{221}}{2}}$.

$BF = \sqrt{(x_F - x_B)^2 + (y_F - y_B)^2} = \sqrt{(15-9)^2 + \left(\dfrac{7}{2} - (-1)\right)^2} = \sqrt{6^2 + \left(\dfrac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{36 + \dfrac{81}{4}} = \sqrt{\dfrac{225}{4}} = \dfrac{\sqrt{225}}{2}$
$= \boxed{\dfrac{15}{2}}$.

$CF \neq BF$ donc F n'appartient pas à la médiatrice de $[BC]$. (2 pt)



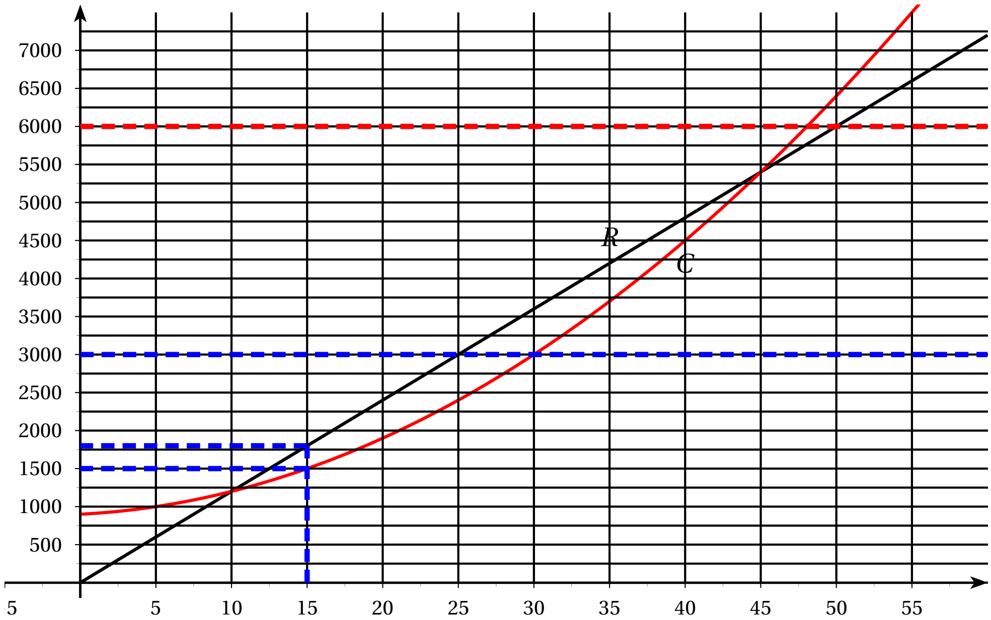
IV

Une entreprise fabrique chaque jour des tablettes numériques, au maximum 60 tablettes et on admet qu'elle vend toute sa production.

On a représenté graphiquement les fonctions C (coût total) et R (recette) sur $[0;60]$.

Le coût total et la recette sont exprimés en euros.

On rappelle que le bénéfice se calcule en retranchant à la recette les coûts de production.



1. (a) On lit graphiquement (voir les lignes pointillées sur le graphique) : $\boxed{R(15) \approx 1\,800}$ et $\boxed{C(15) \approx 1\,500}$. (1 pt)
   (b) La vente de 15 tablettes rapporte 1 800 € et le coût total correspondant à 15 tablettes est de 1 500 € (0,5 pt)
   (c) Le bénéfice pour la production de 15 tablettes est donc d'environ 300 €. (0,5 pt)
2. (a) Les solutions de l'équation $C(x) = 3\,000$ sont les abscisses des points de la courbe correspondant à la fonction C et ayant une ordonnée égale à 3 000.
   On trouve $\boxed{x \approx 30}$ (1 pt)
   (b) La production de 30 tablettes coûte 3 000 tablettes. (0,5 pt)
3. (a) Les solutions de l'inéquation $R(x) \leqslant 6\,000$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de R et ayant une ordonnées inférieure ou égale à 6 000.
   $\boxed{\mathscr{S} = [0\,;\,50]}$ (1 pt)
   (b) Si l'entreprise fabrique moins de 50 tablettes, sa recette est inférieure ou égale à 6 000 €. (0,5 pt)
4. (a) On regarde les abscisses des points d'intersection des deux courbes : l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{D} = \{10\,;\,45\}}$ (1 pt)
   (b) Si l'entreprise fabrique 10 ou 45 tablettes, son bénéfice est nul. (0,5 pt)
5. (a) L'inéquation à résoudre est : $R(x) \leqslant C(x)$. (1 pt)
   (b) Le bénéfice serait négatif pour $\boxed{0 \leqslant x \leqslant 10 \text{ ou } 45 \leqslant x \leqslant 60}$ donc $\boxed{\mathscr{S} = [0\,;\,10] \cup [45\,;\,60]}$. (1 pt)

V

Soient f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^2 + 7 \\ g(x) &= \frac{3}{7}x + 6 \end{aligned}$$

1. - $f(3) = -3 \times 3^2 + 7 = -27 + 7 = \boxed{-20}$
   - $f(-1) = -3 \times (-1)^2 + 7 = -3 + 7 = \boxed{4}$
   - $f(7) = -3 \times 7^2 + 7 = -3 \times 49 + 7 = \boxed{-140}$. (1,5 pt)
2. - $g(0) = \boxed{6}$
   - $g(7) = \frac{3}{7} \times 7 + 6 = 3 + 6 = \boxed{9}$
   - $g(-1) = \frac{3}{7} \times (1) + 6 = -\frac{3}{7} + \frac{42}{7} = \boxed{\frac{39}{7}}$ (1,5 pt)

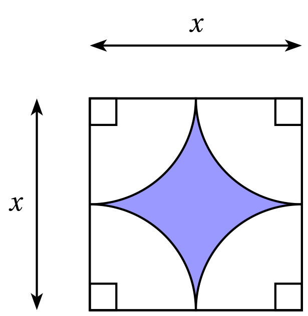
3. • On résout l'équation $f(x) = 7$ donc $-3x^2 + 7 = 7$ qui donne $-3x^2 = 0$ puis $x^2 = 0$ donc $x = 0$: $\boxed{\mathscr{S} = \{0\}}$.
   • On résout l'équation $f(x) = 8$ donc $-3x^2 + 7 = 8$ qui donne $-3x^2 = 1$ qui est impossible puisque $-3x^2 \leqslant 0$ et 1>0.
   $\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$.
   • On résout l'équation $f(x) = 16$ donc $-3x^2 + 7 = 16$ qui donne $-3x^2 = 9$.
   $\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$. (même raison) (2 pt)
4. • On résout $g(x) = 0$ qui donne $\frac{3}{7}x + 6 = 0$ donc $\frac{3}{7}x = -6$ puis $3x = -6 \times 7$ qui donne $x = -\frac{6 \times 7}{3} = -14$; $\boxed{\mathscr{S} = \{-14\}}$
   • On résout $g(x) = 1$ qui donne $\frac{3}{7}x + 6 = 1$ donc $\frac{3}{7}x = -5$ puis $x = -\frac{35}{3}$; $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{35}{3}\right\}}$
   • On résout $g(x) = -2$ qui donne $\frac{3}{7}x + 6 = -2$ donc $\frac{3}{7}x = -8$ puis $3x = -8 \times 7$ qui donne $x = -\frac{8 \times 7}{3} = -\frac{56}{3}$; $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{56}{3}\right\}}$. (3 pt)
5. On a $f(0) = 7$ et $g(0) = 6$ donc $f(0) > g(0)$.
   Il exsite une valeur de x pour laquelle $f(x) > g(x)$ donc l'affirmation est **fausse**.
6. $g(x) \geqslant 8$ donc $\frac{3}{7}x + 6 \geqslant 8$ donc $\frac{3}{7}x \geqslant 2$ d'où $3x \geqslant 14$ qui donne $\boxed{x \geqslant \frac{14}{3}}$ (1 pt)

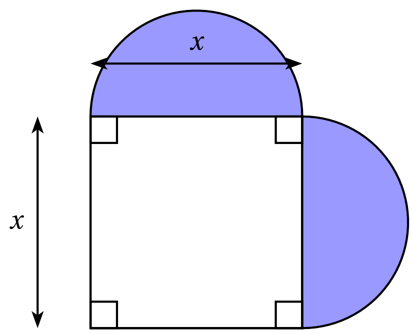
   Pour tout x $x^2 \geqslant 0$ donc $3x^2 \geqslant 0$ d'où $-3x^2 \leqslant 0$ et $f(x) = -3x^2 + 7 \leqslant 7$.
   Pour $x \geqslant \frac{14}{3}$, on a $f(x) \leqslant 7$ et $g(x) \geqslant 8$ donc $f(x) \leqslant g(x)$.

   Un intervalle possible pour que $f(x) \leqslant g(x)$ est $\boxed{\left[\frac{14}{3}\,;\,=\infty\right[}$ (1 pt)

Exercice bonus

1. Pour chacune de ces deux figures, exprimer l'aire de la surface coloriée en fonction de x.





   • Pour la première figure, l'aire de la surface coloriée est égale à celle du carré, moins la somme des aires des quatre quarts de disque, chacun de rayon $\frac{x}{2}$, ui équivaut à celle d'un seul disque de rayon $\frac{x}{2}$, d'aire πx^2
   Cette aire vaut donc $\mathscr{A}_1 = \boxed{x^2 - \pi x^2}$.
   • Pour la deuxième figure , nous avons la somme des aires de deux demi-disques de rayon $\frac{x}{2}$ qui équivaut à celle d'un disque de rayon $\boxed{\frac{x}{2}}$.
   $\mathscr{A}_2 = \pi x^2$
2. $\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = x^2 - \pi x^2 + \pi x^2 = \boxed{x^2}$ qui est **l'aire du carré**.