Correction du contrôle commun nº 2 de mathématiques

I **7 points**

Pour chacune des propositions ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. Si une fonction f quelconque définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $f(0) < f(1)$, alors f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
   FAUX : on peut avoir une fonction définie sur $\mathbb{R}$ avec $f(0) = 1$ et $f(1) = 2$ avec f non croissante sur $\mathbb{R}$. Par exemple, une fonction dont le tableau de variation est :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	

1 pt

2. Si la moyenne de quatre notes est égale à 5 alors la moitié de ces notes est inférieure ou égale à 5.
   FAUX : la moyenne n'est pas toujours égale à la moyenne.
   Exemple : on considère la série 2; 6; 6; 6. La moyenne est 5, car $\dfrac{2+6+6+6}{4} = 5$, mais la médiane est 6 (moyenne entre la deuxième et la troisième valeur), donc la moitié de ces valeurs n'est pas inférieure ou égale à 5. 1 pt
3. Pour tout réel x, la fonction définie par $f(x) = 5x + 4$ est positive.
   FAUX : exemle : $f(-2) = -6 < 0$ 1 pt
4. La droite d'équation $y = -x - 50$ coupe l'axe des abscisses.
   VRAI : on résout l'équation $-x - 50 = 0$ et on trouve $x = -50$. La droite coupe l'axe des abscisses au point de coordonnés $(-50\,;\,0)$. 1 pt

Soit g une fonction dont le tableau de variations est le suivant :

x	-40		-24		12		50
$g(x)$	2	$\nearrow$	20	$\searrow$	-30	$\nearrow$	1

1 pt

5. Alors, on peut en déduire que $g(-18) < g(2)$.
   FAUX : -18 et 2 appartiennent à $[)24; 12]$, intervalle sur le quel la fonction est décroissante; g renverse l'ordre. Comme $-18 < 2$, on a $\boxed{g(-18) > g(2)}$. 1 pt
6. Alors, on peut en déduire que $g(-30) > g(20)$.
   VRAI : -30 appartient à l'intervalle $[-40\,;\,-24]$ et sur cet intervalle, on a $g(x) \geqslant 2$ (car 2 est le minimum de g sur cet intervalle).
   De même, 20 appartient à l'intervalle $[12\,;\,50]$ et $g(x) \leqslant 1$ sur cet intervalle; on en déduit que $g(20) \leqslant 1 < 2 \leqslant g(-30)$ donc $g(-30) > g(20)$. 1 pt
7. Alors, on peut en déduire que $g(14) \leq g(30)$.
   VRAI : 14 et 30 appartiennent tous deux à l'intervalle $[12; 50]$ sur lequel la fonction g est croissante; comme $14 < 30$, alors $\boxed{g(14) < g(30)}$. 1 pt

II **3 points**

L'algorithme suivant donne le résultat d'un examen en fonction de deux notes N_1 et N_2 entrées par l'utilisateur :

Entrées : N_1, N_2
Sorties : Aucune
Lire N_1
Lire N_2
$\dfrac{N_1 + N_2}{2} \to M$
Si $M \geqslant 10$ ALORS
    AFFICHER « L'examen est réussi ! »
Finsi
Si $M < 10$ ALORS
    AFFICHER « L'examen est échoué ! »
Finsi

1. Si l'utilisateur choisit $N_1 = 5$ et $N_2 = 17$, l'algorithme calcule $M = \dfrac{N_1 + N_2}{2} = 11 > 10$ donc l'algorithme affiche « l'examen est réussi ». 1 pt
2. M représente la moyenne des nombres N_1 et N_2. 1 pt
3. **Algorithme modifié :** 1 pt

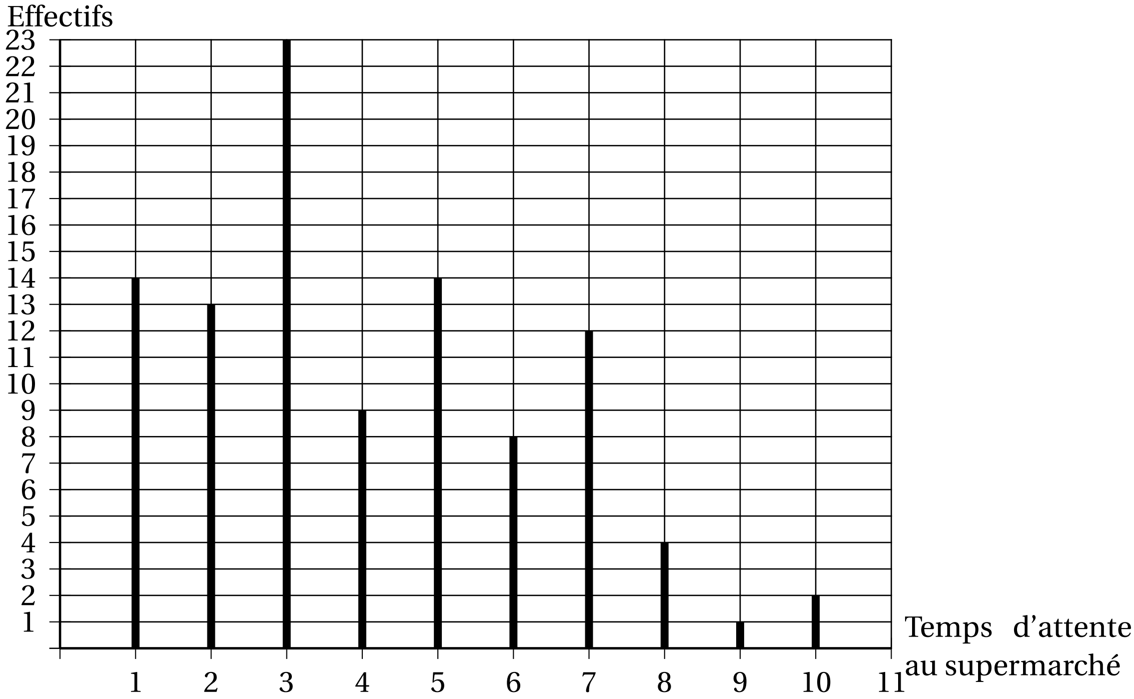
Entrées : N_1, N_2
Sorties : Aucune
Lire N_1
Lire N_2
$\dfrac{N_1 + N_2}{2} \to M$
Si $M \geqslant 10$ ALORS
Si $M \geqslant 12$ ALORS
AFFICHER « L'examen est réussi avec mention »
SINON AFFICHER « L'examen est réussi ! »
Finsi
SINON AFFICHER « L'examen est échoué ! »
Finsi

III — 11,5 points

Un directeur de supermarché décide d'étudier le temps d'attente aux caisses. Pour cela, il note le lundi et le vendredi les temps d'attente en minutes, de 100 clients.

A. Étude de l'échantillon du lundi

Le lundi, il obtient la répartition suivante :



1. Tableau complété :

Temps d'attente (en min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	14	13	23	9	14	8	12	4	1	2
E.C.C.	14	27	50	59	73	81	93	97	98	100

1 pt

2. Le temps moyen d'attente aux caisses du supermarché pour cet échantillon est
$\overline{x} = \dfrac{(1\times 14)+(2\times 13)+\cdots+(10\times 2)}{100} = \dfrac{408}{100} = \boxed{4,08}$.
Le temps d'attente moyen est 4,08 min, soit 4 min + $0,08 \times 60$ s d'où 4 min 4,8 s. 1 pt

3. L'effectif total vaut $N = 100$ qui est pair ; la médiane est alors : $Me = \dfrac{x_{50}+x_{51}}{2} = \dfrac{3+4}{2} = \boxed{3,5}$.
$\dfrac{N}{4} = 25$ donc le premier quartile est $Q_1 = x_{25} = \boxed{2}$.
$\dfrac{3N}{4} = 75$ donc le troisième quartile est $Q_3 = x_{75} = \boxed{6}$. 3 pt

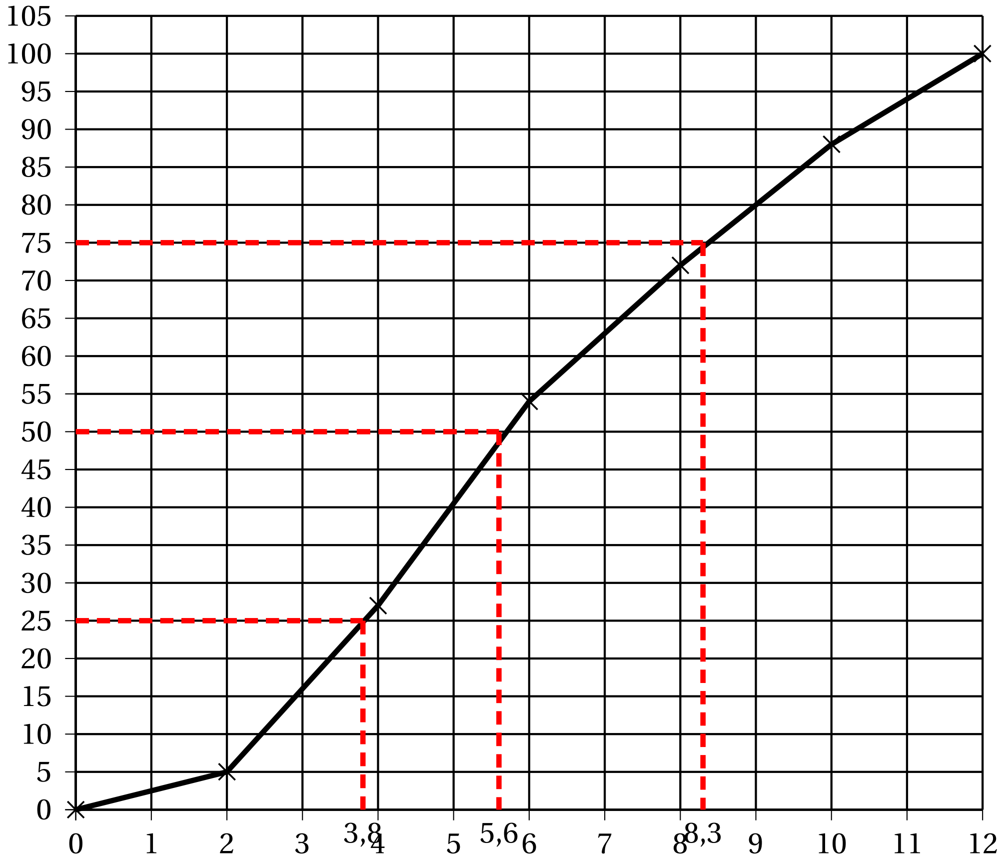
4. Le nombre de clients attendant 7 minutes ou plus est $100 - 81 = 19$; $\dfrac{19}{100} = 19\,\% > 15\,\%$.
Le directeur adjoint doit ouvrir une nouvelle caisse. 1 pt

B. Étude de l'échantillon du vendredi

Le vendredi, il obtient la répartition suivante :

Temps d'attente en caisse	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[	[10;12]
Effectif	5	22	27	18	16	12
Fréquence	0,05	0,22	0,27	0,18	0,16	0,12
Fréquence cumulée croissante (FCC)	0,05	0,27	0,54	0,72	0,88	1

1. Le temps d'attente moyen est $\dfrac{(1\times 5)+\cdots+(11\times 12)}{100} = \dfrac{608}{100} = 6,08$ min = 6 min 4,8 s. 1 pt



2. 1 pt

3. On regarde les points de la courbe des fréquences cumulées croissantes ayant pour ordonnées 25, 50 et 75.
   Graphiquement, on trouve $\boxed{Q_1 \approx 3,8}$, $\boxed{Me = 5,6}$ et $\boxed{Q_3 = 8,3}$. 1,5 pt

C. Comparaison des deux échantillons

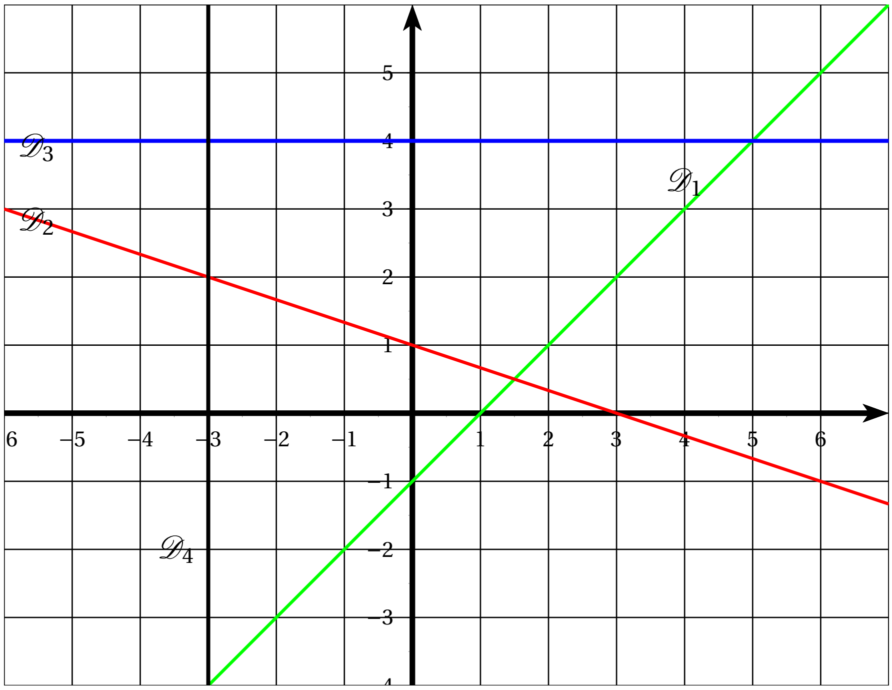
Les clients qualifient de tolérable un temps d'attente compris entre 2 et 6 minutes inclus.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse :

1. « Le vendredi, au moins un quart des clients attendent au plus trois minutes en caisse ».
   FAUX : : $Q_1 \approx 3,8$ donc au moins un quart des clients attendent au plus 3,8 minutes en caisse. 1 pt
2. « Il y a autant de clients qui trouvent le temps d'attente acceptable le lundi que le vendredi ».
   FAUX : : le lundi, il y a 67 clients qui attendent entre 2 et 6 minutes (donc un temps acceptable) et le vendredi, il y en a 49. 1 pt

IV **10 points**

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Déterminer l'équation réduite de chacune des droites représentées dans le repère ci-dessous :



- Pour $\mathscr{D}_1$; l'ordonnée à l'origine est -1; on lit le coefficient directeur qui est 1 donc son équation est $\boxed{y = x - 1}$
- Pour $\mathscr{D}_2$: l'ordonnée à l'origine est 1 et le coefficient directeur $-\dfrac{1}{3}$ donc son équation est $\boxed{y = -\dfrac{1}{3}x + 1}$.
- $\mathscr{D}_3$ est parallèle à l'axe des abscisses, donc son coefficient directeur est 0; son ordonnée à l'origine est 4, donc son équation est : $\boxed{y = 4}$.
- $\mathscr{D}_4$ est parallèle à l'axe des ordonnées donc son équation est $\boxed{x = -3}$. 3 pt

2. Soit (d) la droite d'équation $y = 3x - 4$.
   (a) $3x_A - 4 = 3 \times \dfrac{1}{3} - 4 = 1 - 4 = -3 = y_A$ donc A **appartient** à (d).
   (b) $3 \times (-10) - 4 = -30 - 4 = -34 \neq y_B$ donc B **n'appartient pas** à (d). 3 pt
3. Soient $A(2\,;\,3)$, $B(2\,;\,5)$ et $C(4\,;\,13)$.
   (a) $x_A = x_B$ donc la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées; son équation est $\boxed{x = 2}$.
   (b) $x_A \neq x_C$ donc (AC) est sécante à laxe des ordonnées; son équation réduite est du type $y = ax + b$.
   Le coefficient directeur est $a = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{13-3}{4-2} = \dfrac{10}{2} = 5$.
   L'équation est $y = 5x + b$.
   A appartient à cette droite donc ses coordonnées vérifient cette équation;
   On en déduit : $y_A = 5x_1 + b$ d'où $3 = 5 \times 2 + b$ donc $3 = 10 + b$; on en déduit $b = -7$.
   (AC) a pour équation $\boxed{y = 5x - 7}$. 3 pt
4. Le coefficient directeur de (d) est 3, celui de (d') est 2; les deux droites n'ont pas le même coefficient directeur, donc elles ne sont **pas parallèles**. 1 pt

V **8,5 points**

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Parmi les fonctions suivantes, préciser lesquelles sont affines. Justifier soigneusement.
   - $f : x \mapsto 1+2x$; f est **affine** car $1+2x = ax+b$ avec $a=2$ et $b=1$.
   - $g : x \mapsto -3x^2$; g n'est **pas affine** car $-3x^2$,'est pas de la forme $ax+b$.
   - $h : x \mapsto -2x+1$; h est **affine** car $-2x+1 = ax+b$ avec $a=-2$ et $b=1$.
   - $i : x \mapsto \dfrac{1}{x}+2$; i n'est **pas affine** car $\dfrac{1}{x}+2$ n'est pas de la forme $ax+b$ ou l'ensemble de définition de i n'est pas $\mathbb{R}$. 1,5 pt

2. Soit $f : x \mapsto -5x+8$

   (a) Le coefficient directeur de f est -5 qui est négatif, donc la fonction est décroissante ;
   $f(x)=0$ pour $x=\dfrac{8}{5}$.
   Le tableau de variation est :

x	$-\infty$		$\frac{8}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

   1 pt

   (b) Tableau de signes de f :

x	$-\infty$		$\frac{8}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

   1,5 pt

3. (a) Déterminer l'expression de la fonction affine f telle que $f(0)=1$ et $f(-1)=-12$.
   $f(x)=ax+b$; le coefficient directeur est $a=\dfrac{f(-1)-f(0)}{(-1)-0}=\dfrac{-12-1}{-1}=13$ donc
   $f(x)=13x+b$.
   $f(0)=1$ donne $b=1$ d'où $\boxed{f(x)=13x+1}$. 2 pt

   (b) Déterminer l'expression de la fonction linéaire g telle que $g(-3)=7$.
   $g(x)=mx$; $g(-3)=7$ donc $-3m=7$ d'où $m=\dfrac{7}{-3}=\dfrac{7}{3}$ donc $\boxed{g(x)=-\dfrac{7}{3}x}$. 0,5 pt

   (c) Soit h une fonction affine telle que $h(-1)=-5$ et $h(2)=4$. Déterminer $h(3)$.
   h est affine donc $h(x)=ax+b$.
   $a=\dfrac{h(2)-h(-1)}{2-(-1)}=\dfrac{4-(-5)}{3}=3$ donc $a=3$.
   $h(x)=3x+b$; $h(2)=4$ donne $6+b=4$ donc $b=4-6=-2$ d'où $\boxed{h(x)=3x-2}$.
   On en déduit que $h(3)=3\times3-2=7$ donc $\boxed{h(3)=7}$. 2 pt