2nde : contrôle sur les probabilités
1 heure

I

Soit A et B deux événements tels que :

- $p(A) = 0,7$
- $p(B) = 0,5$
- $p(A \cap B) = 0,3$

1. Calculer

   (a) $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A) = 0,3$ donc $\boxed{p\left(\overline{A}\right) = 0,3}$

   (b) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
   $= 0,7 + 0,5 - 0,3 = ,9$: $\boxed{p(A \cup B) = 0,9}$

   (c) $B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ (réunion d'événements incompatibles).
   On en déduit : $p(B) = p(A \cap B) + p\left(\overline{A} \cap B\right)$
   donc $p\left(\overline{A} \cap B\right) = p(B) - p(A \cap B)$
   $= 0,5 - 0,3 = \boxed{0,2}$.
   $\boxed{p\left(\overline{A} \cap B\right) = 0,2}$

2. $p(A \cap B) = 0,39$ donc $A \cap B \neq \emptyset$ donc A et B ne sont **pas incompatibles**.

II

On considère deux événements V et F tels que :

- $p(V) = 0,4$
- $p(F) = 0,3$
- $p(V \cup F) = 0,8$

Cet élève a raison de dire que ce n'et pas possible, car $p(V \cup F) = p(V) + p(F) - p(V \cap F) \leqslant p(V) + p(F)$ donc $p(V \cup F) \leqslant 0,7$; or $p(V \cup F) = 0,8 > 0,7$, ce qui est impossible.

III Résultats au bac

— 19 % de l'effectif total est en classe Terminale; $19\,\% \times 2000 = \boxed{380}$.

— parmi ces élèves de Terminale, 55 % sont des filles; $55\,\% \times 380 = \boxed{209}$

— le taux de réussite au baccalauréat dans cet établissement est de 85 %; $85\,\% \times 380 = \boxed{323}$

— parmi les candidats ayant échoué, la proportion des filles a été de $\frac{8}{19}$.

1. Recopier et compléter le tableau des effectifs regroupant les résultats au baccalauréat :

   On complète le tableau avec les résultats calculés ci-dessus.

   Le nombre d'élèves ayant échoué est $380 - 323 = \boxed{57}$.

   $\frac{8}{19} \times 57 = \frac{8 \times 3 \times 19}{19} = 8 \times 3 = \boxed{24}$ (résultat déjà inscrit dans le tableau)

   Le nombre de filles ayant réussi est $209 - 24 = 185$; le nombre de garçons ayant réussi est alors $323 - 185 = \boxed{138}$.

   Le nombre de garçons ayant échoué est $57 - 24 = \boxed{33}$;

   le nombre total de garçons est $380 - 209 = \boxed{171}$

Éleves	Garçons	Filles	TOTAL
Réussite	138	185	323
Échec	33	24	57
TOTAL	171	209	380

2. - R est « l'événement l'élève a eu son baccalauréat » (donné dans l'énoncé!)
   - $\overline{G} \cap R$ est l'événement « l'élève est une fille qui a réussi son baccalauréat ».

3. Calculer les probabilités des événements suivants :

   (a) $p\left(\overline{R}\right) = \frac{57}{380} = \boxed{0,15}$

   (b) $p\left(\overline{G} \cup \overline{R}\right) = p\left(\overline{G}\right) + p\left(\overline{R}\right) - p\left(\overline{G} \cap \overline{R}\right)$
   $= \frac{209}{380} + \frac{57}{380} - \frac{24}{380} = \frac{242}{380} = \boxed{\frac{121}{190} \approx 0,64}$.

4. On choisit un élève au hasard parmi les bacheliers.

   La probabilité que ce soit une fille est $\frac{85}{323} = \boxed{\frac{5}{19} \approx 0,26}$.

IV Tirage successif avec remise

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes, on la note, puis on la remet dans le jeu avant d'en tirer une seconde.

On rappelle que les 32 cartes d'un jeu de 2 cartes sont réparties en quatre couleurs (trèfle, carreau, cœur et pique) ; les cartes sont appelées 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; Valet ; Dame ; Roi et As.

1. Oui, il y a équiprobabilité puisque chaque couple de résultats a la même chance d'être choisi.
2. Chaque issue est de la forme $(X ; Y)$ où X est une des 32 cartes et Y une des 32 cartes. Il y a 32^2 couples possibles, donc $\boxed{1\,024}$ issues.
   On peut imaginer un arbre avec 32 branches pour le choix de la première carte, puis de chacune de ces 32 branches partent 32 branches correspondant au choix de la seconde carte.
3. Puisque nous avons équiprobabilité, la probabilité d'un événement est le quotient du nombre d'issues de cet événement par le nombre total d'issues.
   (a) La probabilité de tirer 2 cœurs est $\dfrac{8\times 8}{1\,024} = \dfrac{64}{1024} = \dfrac{1}{16}$. (car il y a 8 branches contenant un cœur pour la première carte puis de nouveau 8 branches partant de chacun de ces branches contenant un cœur pour la seconde carte)
   (b) La probabilité de ne pas tirer de cœur est $\dfrac{24\times 24}{1\,024} = \boxed{\dfrac{9}{16}}$ (car il y a 24 cartes qui ne sont pas un cœur)
   (c) La probabilité de tirer exactement 1 cœur est $\dfrac{8\times 24}{1024} + \dfrac{24\times 8}{1024} = \boxed{\dfrac{3}{8}}$ (on distingue les cas où le cœur a été choisi en premier ou en deuxième)
   (d) La probabilité de tirer deux fois la même carte est $\dfrac{32\times 1}{1024} = \boxed{\dfrac{1}{32}}$ (pour chaque carte choisie en premier correspond une seule carte pour le deuxième choix)
   (e) La probabilité de tirer deux cartes différentes est $\dfrac{32\times 31}{1024} = \boxed{\dfrac{31}{32}}$
   (f) La probabilité de tirer le roi de cœur est $\dfrac{1\times 31 + 31\times 1}{1024} = \boxed{\dfrac{31}{512}}$ (si on a tiré le roi de cœur en premier, on doit choisir une des 31 autres cartes en deuxième et de même si le roi de cœur est choisi en deuxième)

V

1. Sur le graphique ci-contre, tracer les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions :
   $f : x \mapsto f(x) = x^2$ et $g : x \mapsto g(x) = -x+6$.
   $\mathscr{C}_f$ est la parabole étudiée en cours et $\mathscr{C}_g$ est une droite, représentative d'une fonction affine d'ordonnée à l'origine 6 et de coefficient directeur -1.
2. Les deux courbes semblent avoir deux points d'intersection, d'abscisses -3 et 2.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $(x-2)(x+3) = x^2+3x-2x-6 = x^2+x-6$ donc $\boxed{x^2+x-6 = (x-2)(x+3)}$
4. $x^2-x+6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3) = 0$ d'après la question précédente.
   Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.
   On en déduit $x=-3$ ou $x=2$: $\boxed{\mathscr{S} = \{-3 ; 2\}}$
5. On en déduit que les deux courbes ont deux points d'intersection, de coordonnées $(-3 ; 9)$ et $(2 ; 4)$