2nde : TD probabilités (2)

I

Soit S et T deux événements tels que :

- $p(S) = 0,5$
- $p(T) = 0,6$
- $p(S \cup T) = 0,9$

1. On a vu en cours que $p(S \cup T) = p(S) + p(T) - p(T \cap S)$.
   On en déduit : $p(S \cap T) = p(S) + p(T) - p(S \cup T) = 0,5 + 0,6 - 0,9 = 0,2$: $\boxed{p(S \cap T) = 0,2}$
2. $p\left(\overline{S \cup T}\right) = 1 - p(S \cup T) = 1 - 0,9 = 0,1$: $\boxed{p\left(\overline{S \cup T}\right) = 0,1}$
3. $p\left(\overline{S \cap T}\right) = 1 - p(S \cap T) = 1 - 0,2 = 0,8$: $\boxed{p\left(\overline{S \cap T}\right) = 0,2}$

II

A et B sont deux événements tels que :

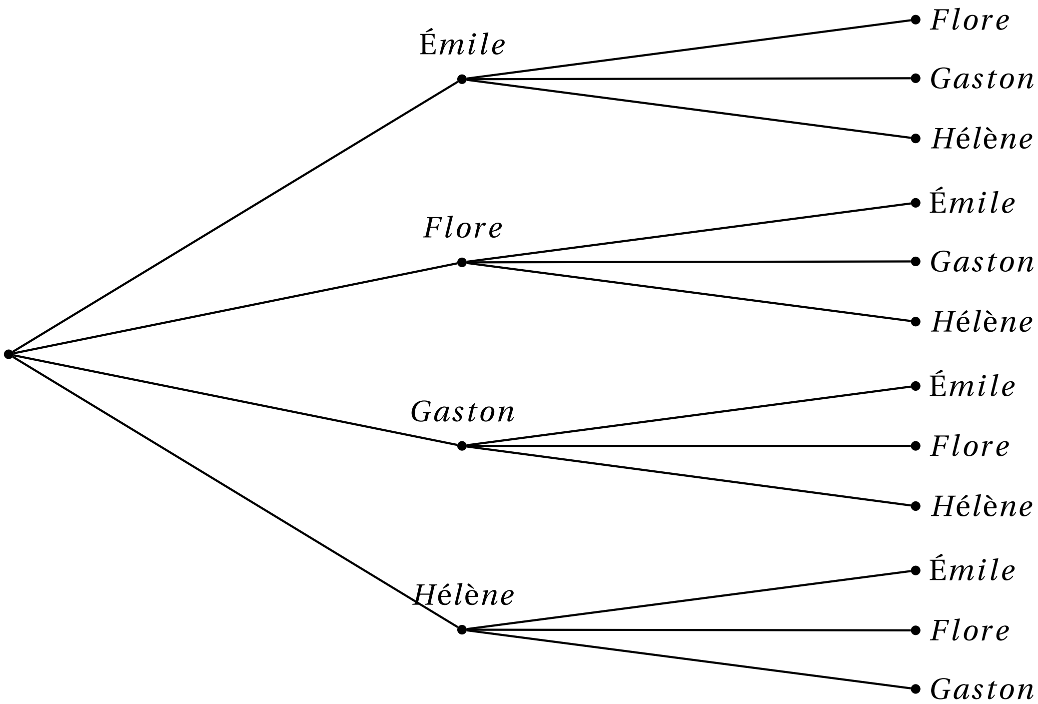
- $p(A) = 0,8$
- $p(B) = 0,53$

1. Si A et B sont incompatibles, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) = 0,8 + 0,53 = 1,33$; c'est impossible puisque la probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1.
   A et B ne sont pas incompatibles.
2. On sait que $p(A \cup B) = 0,95$, calculer :
   (a) $p(A \cap B) = pA) + p(B) = -p(A \cup B) = 0,8 + 0,53 - 0,95 = 0,38$: $\boxed{p(A \cap B) == 0,38}$
   (b) on peut séparer les éléments de A en deux parties : ceux qui appartiennent à B et ceux qui n'appartiennent pas à B.
   $A = (A \cap B) \cup \left(A \cup \overline{B}\right)$, réunion d'événements incompatibles (un élément ne peut pas appetenir à la fois à B et à l'événement contraire de B).
   On en déduit que $p(A) = p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right)$ donc $p\left(A \cap \overline{B}\right) = p(A) - p(A \cap B) = 0,8 - 0,38 = 0,42$:
   $\boxed{p\left(A \cap \overline{B}\right) = 0,42}$

III

Un groupe de 4 amis, Émile, Flore, Gaston et Hélène sont dans un bateau. Ils tirent au sort celui qui va ramer et, parmi les noms restants, celui qui va écoper.

1. On choisit d'abord l'ami qui va ramer puis celui qui va écoper (retirer l'eau qui rentre dans le bateau).



2. Déterminer les probabilités suivantes. L'univers est constitué des douze couples possibles.
   Les amis comportent deux garçons (Émile et Gaston) et deux filles (Flore et Hélène)
   (a) Il y a 6 couples possibles avec un garçon qui rame.
   $\boxed{p(\text{« C'est un garçon qui rame »}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}}$
   (b) il y a trois couples avec Hélène qui écope (cela revient à prendre l'un des tris autres amis à la rame).
   $\boxed{p\left(\text{« Hélène écope »}\right) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}}$.
   (c) Quatre couples sont constitués d'amis de même sexe.
   $\boxed{p\left(\text{« Les deux qui travaillent sont de même sexe »}\right) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}}$

IV

Un univers associé à une expérience aléatoire est constitué de trois issues.
La loi de probabilité vérifie $p(A) = t^2$, $p(B) = t$ et $p(C) = \frac{1}{4}$.
Déterminer t.
La somme des probabilités des tris issues doit être égale à 1, donc $t^2 + t + \frac{1}{4} = 1$.
Cela s'écrit : $\frac{4t^2+t+1}{4} = 1 \Leftrightarrow 4t^2 + t + 1 = 4 \Leftrightarrow (2t)^2 + 2 \times 2t \times 1 + 1^2 = 4$
$\Leftrightarrow (2t+1)^2 = 4 \Leftrightarrow (2t+1)^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow [(2t+1)+2][(2t+1)-2] = 0 \Leftrightarrow (2t+3)(2t-1) = 0.$
un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

- $2t+3 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{2}$ qui est impossible car t est la probabiité de B, donc un nombre compris entre 0 et 1.
- $2t-1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$
- Conclusion : $\boxed{t = \frac{1}{2}}$

V

Une entreprise fabrique des ordinateurs portables. Ils peuvent présenter deux défauts :

— un défaut de clavier ;

— un défaut d'écran.

Sur un grand nombre d'ordinateurs, une étude statistique montre que :

— 2 % présentent un défaut d'écran ;

— 2,4 % présentent un défaut de clavier ;

— 1,5 % présentent les deux défauts.

1. On choisit au hasard un ordinateur et on considère les événements suivants.

   — E : « L'ordinateur présente un défaut d'écran » ;

   — C : « L'ordinateur présente un défaut de clavier ».

   D'après l'énoncé, on a :

   - $p(E) = 2\,\% = \dfrac{2}{100} = 0,02$
   - $p(C) = 2,4\,\% = \dfrac{2,4}{100} = 0,024$
   - $p(E \cap C) = 1,5\,\% = \dfrac{1,5}{100} = 0,015$

2. (a) et (b) :

   — $p\left(\text{« L'ordinateur présente au moins un défaut »}\right) = p(E \cup C) = p(E) + p(C) - p(E \cap C)$
   $= 0,02 + 0,024 - 0,015 = \boxed{0,029}$

   — $p\left(\text{« « L'ordinateur ne présente que le défaut de d'écran » »}\right) = p\left(E \cap \overline{C}\right)$
   $= p(E) - p(E \cap C) = 0,02 - 0,015 = \boxed{0,005}$