2^nde : correction des exercices sur les inéquations

I

Alice a obtenu 9 et 11 sur 20 aux deux derniers contrôles, affecté chacun d'un coefficient 1.

a) On note x la note minimale qu'elle doit obtenir. Sa moyenne est alors $\dfrac{9+11+2x}{4} \Leftrightarrow \dfrac{20+2x}{4} \geqslant 12 \Leftrightarrow \dfrac{2(10+x)}{2\times 2} \geqslant 12 \Leftrightarrow \dfrac{10+x}{2} \geqslant 12$.

b) Résolution : L'inéquation est donc $\dfrac{10+x}{2} \geqslant 12 \Leftrightarrow 10+x \geqslant 24 \Leftrightarrow x \geqslant 24-10 = \boxed{14}$.
Elle doit donc avoir au moins 14 au troisième contrôle pour avoir une moyenne supérieure ou égale à 12.

II

On veut déterminer l'arête d'un cube devant contenir au moins deux litres d'eau.
On note x la longueur d'une arête en dm. on sait qu'un dm^3 correspond à un litre.
On doit donc avoir $\boxed{x^3 \geqslant 2}$.

Remarque : comme la fonction $x \mapsto x^3$ est croissante (voir cours de Première), les solutions de cette inéquation forment un intervalle : $\mathscr{S} = \left[\sqrt[3]{2}\,;\,+\infty\right[$, où $\sqrt[3]{2}$ est la racine cubique de 2, c'est-à-dire le nombre dont le cube est 2.

III

Déterminer les signes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = (x+6)^2 - 25$
On factorise : $f(x) = (x+6)^2 - 5^2 = [(x+6)+5][(x+6)-5]$ donc $\boxed{f(x) = (x+11)(x+1)}$.
$f(x) = 0$ pour $x = -11$ ou $x = -1$ car un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.
Tableau de signes :

x	$-\infty$		-11		-1		$+\infty$
Signe de $x+11$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $g(x) = (5x-3)^2 - (x-4)^2$
On factorise en reconnaissant une identité remarquable, du type $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
$g(x) = (5x-3)^2 - (x-4)^2 = [(5x-3)+(x-4)][(5x-3)-(x-4)] = (5x-3+x-4)(5x-3-x+4) = (6x-7)(4x+1)$
$g(x)$ s'annule pour $x = \dfrac{7}{6}$ ou pour $x = -\dfrac{1}{4}$
Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{7}{6}$		$+\infty$
Signe de $6x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $4x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) $h(x) = x^2 - 7x = x(x-7)$.

$h(x)$ s'annule pour $x = 0$ ou $x = 7$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		0		7		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$	0	$+$	
Signe de $x-7$		$-$	|	$-$	|	$+$	
Signe de $h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d) $k(x) = (-3x+8)(7x-4) - (-3x+8)(5-2x)$.

On factorise avec comme facteur commun $-3x+8$.

$k(x) = (-3x+8)\left[(7x-4)-(5-2x)\right] = (-3x+8)(7x-4-5+2x) = (-3x+8)(9x-9) = 9(-3x+8)(x-1)$.

$k(x)$ s'annule en 1 ou en $\dfrac{8}{3}$ et $k(x)$ est du signe de $(-3x+8)(x-1)$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		1		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
Signe de $-3x+8$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Signe de $x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $k(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

IV

a) $x^2 > 16 \Leftrightarrow x^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4^2 > 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-4) > 0$

$(x+4)(x-4)$ s'annule pour $x = -4$ ou $x = 4$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
Signe de $x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $(x+4)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\,;\,-4[\cup]4\,;\,+\infty[}$

b) $16x^2 + 8x + 1 > 0 \Leftrightarrow (4x)^2 + 2 \times 4x \times 1 + 1^2 > 0 \Leftrightarrow (4x+1)^2 > 0$ (on a reconnu une identité remarquable).

$(4x+1)^2 = 0$ pour $x = -\dfrac{1}{4}$ et $(4x+1)^2 > 0$ pour toutes les autres valeurs de x car le carré d'un nombre réel est positif ou nul.

L'ensemble de solutions est donc $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{4}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{4}\,;\,+\infty\right[}$

c) $64x^2 - 121 > 0 \Leftrightarrow (8x)^2 - 11^2 > 0 \Leftrightarrow (8x+11)(8x-11) > 0$.

$(8x+11)(8x-11)$ s'annule pour $x = -\dfrac{11}{8}$ ou $x = \dfrac{11}{8}$

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{11}{8}$		$\frac{11}{8}$		$+\infty$
Signe de $8x+11$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $8x-11$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $(8x+11)(8x-11)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,-\frac{11}{8}\right[\cup \left]\frac{11}{8}\,;\,+\infty\right[}$

d) $49-(3+x)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow 7^2-(3+x)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow [7+(3+x)][7-(3+x)] \leqslant 0 \Leftrightarrow (10+x)(4-x) \leqslant 0.$
$(10+x)(4-x)$ s'annule pour $x=-10$ ou $x=4$
Tableau de signes :

x	$-\infty$		-10		4		$+\infty$
Signe de $10+x$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
Signe de $4-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
Signe de $(10+x)(4-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\,;\,-10] \cup [4\,;\,+\infty[}$

V

a) Soit l'inéquation $\dfrac{3x-1}{7x-9} - \dfrac{3-x}{7x-9} \leqslant 0$

- L'ensemble de définition est $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{9}{7}\right\}$ car le dénominateur s'annule pour $x=\frac{9}{7}$.
- On suppose que $s \in \mathscr{D}$.
  L'inéquation s'écrit alors : $\dfrac{(3x-1)-(3-x)}{7x-9} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-1-3+x}{7x-9} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x-4}{7x-9} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{4(x-1)}{7x-9} \leqslant 0$
- $4(x-1)$ s'annule pour $x=1$ et est du signe de $x-1$
- Tableau de signes :

x	$-\infty$		1		$\frac{9}{7}$		$+\infty$
$4(x-1)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$7x-9$		$-$	$\vert$	$-$	$\Vert$	$+$	
$\dfrac{4(x-1)}{7x-9}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

- On en déduit que l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left[1\,;\,\frac{9}{7}\right[}$.

b) Soit l'inéquation $\dfrac{5+x}{(x-6)(7x+8)} \leqslant 0$

- L'ensemble de définition est $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{8}{7}\,;\,6\right\}$ car $-\frac{8}{7}$ et 6 sont les deux valeurs qui annulent le dénominateur, donc les valeurs interdites.
- $5+x=0 \Leftrightarrow x=-5$
- On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		$-\frac{8}{7}$		6		$+\infty$
$5+x$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	
$x-6$		$-$	$\vert$	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	
$7x+8$		$-$	$\vert$	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	
$\dfrac{5+x}{(x-6)(7x+8)}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

- L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\,;\,-5] \cup \left]-\frac{8}{7}\,;\,6\right[}$